

Вологодский государственный педагогический университет

*На правах рукописи*

КОРОТЫШЕВА Анна Владимировна

ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ МАРКОВСКИХ  
МОДЕЛЕЙ В СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Специальность 05.13.18 - Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук

Научный руководитель: доктор  
физико-математических наук,  
профессор Зейфман А.И.

Вологда - 2013

# Оглавление

|                                                                                                              |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Введение</b>                                                                                              | <b>5</b>  |
| <b>1 Основные понятия</b>                                                                                    | <b>12</b> |
| 1.1 Пространство $l_1$ . . . . .                                                                             | 12        |
| 1.2 Дифференциальные уравнения в пространстве $l_1$ . . . . .                                                | 14        |
| 1.3 Логарифмическая норма оператора . . . . .                                                                | 15        |
| 1.4 Марковские цепи . . . . .                                                                                | 16        |
| 1.4.1 Основные понятия . . . . .                                                                             | 16        |
| 1.4.2 Процессы рождения и гибели с катастрофами . . . . .                                                    | 19        |
| 1.4.3 Возмущенные процессы . . . . .                                                                         | 20        |
| <b>2 Нестационарные системы обслуживания с катастрофами</b>                                                  | <b>23</b> |
| 2.1 Системы обслуживания с независимыми от числа требований в<br>системе интенсивностями катастроф . . . . . | 23        |
| 2.1.1 Введение . . . . .                                                                                     | 24        |
| 2.1.2 Устойчивость вектора состояний . . . . .                                                               | 25        |
| 2.1.3 Оценка для среднего . . . . .                                                                          | 27        |
| 2.1.4 Примеры . . . . .                                                                                      | 30        |
| 2.2 Системы обслуживания с зависимыми от числа требований в<br>системе интенсивностями катастроф . . . . .   | 39        |
| 2.2.1 Введение . . . . .                                                                                     | 39        |
| 2.2.2 Устойчивость для вектора состояний . . . . .                                                           | 40        |

|          |                                                              |            |
|----------|--------------------------------------------------------------|------------|
| 2.2.3    | Оценки для среднего . . . . .                                | 42         |
| 2.2.4    | Аппроксимация . . . . .                                      | 45         |
| 2.2.5    | Пример . . . . .                                             | 48         |
| 2.3      | Система обслуживания $M_t/M_t/S$ с катастрофами . . . . .    | 50         |
| 2.3.1    | Введение . . . . .                                           | 50         |
| 2.3.2    | Слабая эргодичность . . . . .                                | 51         |
| 2.3.3    | Примеры . . . . .                                            | 57         |
| 2.3.4    | Устойчивость . . . . .                                       | 64         |
| 2.3.5    | Оценки для среднего . . . . .                                | 70         |
| 2.3.6    | Примеры . . . . .                                            | 70         |
| <b>3</b> | <b>Система обслуживания <math>M/M/N/N</math></b>             | <b>74</b>  |
| 3.1      | Введение . . . . .                                           | 74         |
| 3.2      | Оценки скорости сходимости . . . . .                         | 75         |
| 3.3      | Оценки устойчивости . . . . .                                | 79         |
| 3.4      | Примеры . . . . .                                            | 81         |
| <b>4</b> | <b>Система обслуживания <math>M/M/N/N+R</math></b>           | <b>85</b>  |
| 4.1      | Введение . . . . .                                           | 85         |
| 4.2      | Общие оценки устойчивости . . . . .                          | 85         |
| 4.3      | Оценки скорости сходимости . . . . .                         | 91         |
| 4.4      | Оценки устойчивости для системы $M_t/M_t/N/N + R$ . . . . .  | 94         |
| 4.5      | Примеры . . . . .                                            | 97         |
| <b>5</b> | <b>СМО с групповым поступлением и обслуживанием требова-</b> |            |
|          | <b>ний</b>                                                   | <b>102</b> |
| 5.1      | Введение . . . . .                                           | 102        |
| 5.2      | Конечные системы . . . . .                                   | 103        |
| 5.2.1    | Скорость сходимости . . . . .                                | 104        |

|                           |                                      |            |
|---------------------------|--------------------------------------|------------|
| 5.2.2                     | Устойчивость . . . . .               | 107        |
| 5.2.3                     | Примеры . . . . .                    | 110        |
| 5.2.4                     | Аппроксимация . . . . .              | 113        |
| 5.3                       | Счетные системы . . . . .            | 116        |
| 5.3.1                     | Оценки скорости сходимости . . . . . | 116        |
| 5.3.2                     | Аппроксимация . . . . .              | 122        |
| 5.3.3                     | Пример . . . . .                     | 126        |
| 5.3.4                     | Устойчивость . . . . .               | 127        |
| 5.3.5                     | Примеры . . . . .                    | 132        |
| <b>Заключение</b>         |                                      | <b>135</b> |
| <b>Приложение</b>         |                                      | <b>136</b> |
| <b>Описание программы</b> |                                      | <b>136</b> |
| <b>Список литературы</b>  |                                      | <b>137</b> |

# Введение

**Актуальность темы.** В исследовании современных телекоммуникационных систем огромную роль играют методы и модели теории массового обслуживания.

Первые работы, относящиеся к такого рода тематике, были проведены А. К. Эрлангом в начале прошлого века. Примерно в 50-е годы двадцатого века выяснилось, что задачи, связанные с обслуживанием больших массивов однородных требований, возникают во многих областях естествознания и техники, и была создана так называемая теория массового обслуживания (англоязычный термин - теория очередей), являющаяся с тех пор активно развивающимся разделом прикладной теории вероятностей.

Существенный вклад в развитие этой области внесли российские и зарубежные ученые В. В. Анисимов, Л. Г. Афанасьева, Г. П. Башарин, А. А. Боровков, П. П. Бочаров, Р. Л. Добрушин, Б. В. Гнеденко, А.Н. Дудин, А. И. Зейфман, В. В. Калашников, Н. В. Карташов, Е. В. Морозов, А. В. Печинкин, В. В. Рыков, И. А. Соколов, С. Г. Фосс, E. Van Doorn, M. Neuts, R.L. Tweedie, W. Whitt и многие другие.

Задачи устойчивости стохастических моделей, связанных с вопросами массового обслуживания, изучались в различных постановках многими авторами.

Так, в работах В.В. Анисимова (см. [2]) исследуются неоднородные марковские процессы с общим пространством состояний и получены утвержде-

ния следующего типа: из равномерной экспоненциальной квази-эргодичности процесса  $X(t)$  следует его равномерная устойчивость; получены соответствующие оценки. Результаты В.В. Анисимова сформулированы в терминах оператора перехода, а не интенсивностей, поэтому применение их к цепям с непрерывным временем достаточно затруднительно. Для процессов со счетным числом состояний аналогичные результаты в терминах инфинитезимальных характеристик были получены А.И. Зейфманом (см. [54]).

В работах Н.В. Карташова (см. [37]) исследуются свойства устойчивости для однородных цепей с дискретным временем и общим фазовым пространством с использованием специальных перенумеровок, аналоги этих результатов можно получить и для случай непрерывного времени. Однако классы процессов, изучаемых Н. В. Карташовым, и в настоящей работе, не пересекаются.

В работах А. И. Зейфмана начато систематическое исследование свойств типа эргодичности и устойчивости для неоднородных марковских цепей с непрерывным временем и приложение этих результатов к моделям массового обслуживания, описываемым процессами рождения и гибели (см. [59], [11]).

В последние годы, с одной стороны, А. Ю. Митрофановым (см. [43]) были улучшены оценки устойчивости для равномерно эргодичных однородных марковских цепей, а с другой, удалось расширить класс исследуемых марковских моделей (см. [63]), в связи с чем на настоящем этапе весьма актуальной стала задача построения оценок устойчивости для новых классов моделей и применение этих оценок для построения предельных характеристик конкретных систем массового обслуживания, в том числе с катастрофами и с групповым поступлением и обслуживанием требований.

**Цель диссертационной работы.** Целью работы является изучение моделей сложных марковских систем массового обслуживания, а именно по-

строение предельных характеристик систем с катастрофами и систем с групповым поступлением и обслуживанием требований.

**Основные задачи.** Для достижения поставленной цели решены следующие задачи:

- получены оценки устойчивости для нестационарных систем обслуживания с катастрофами;
- получены условия слабой эргодичности и оценки устойчивости для системы  $M_t/M_t/S$  с катастрофами;
- получены оценки устойчивости и улучшены оценки скорости сходимости для систем обслуживания  $M_t/M_t/N/N$  и  $M_t/M_t/N/N + R$ ;
- получены оценки скорости сходимости и устойчивости для систем массового обслуживания с групповым поступлением и обслуживанием требований;
- полученные оценки применены для построения предельных характеристик моделей систем обслуживания, близких к известным конкретным системам.

**Методы исследования.** Для решения поставленных задач используется эволюционный оператор (оператор Коши) и генеральный показатель дифференциального уравнения в банаховом пространстве, и методы их оценки. Проблемы вычисления искомых параметров сводятся к изучению дифференциальных уравнений на множестве стохастических векторов. В этом случае возникают проблемы, связанные с получением явных оценок генерального показателя. Для получения этих оценок используется логарифмическая норма оператора, понятие которой введено у Лозинского, а для операторов в банаховом пространстве изучено Далецким и Крейном.

### **Научная новизна.**

- для моделей массового обслуживания с нестационарным марковским поступлением и обслуживанием требований с  $N$  серверами и  $R$  местами ожидания ( $M_t/M_t/N/N + R$ ,  $R \geq 0$ ) в случае равномерной эргодичности (напр., см. теоремы 28, 36) получена оценка устойчивости, в которой множитель  $N$ ,

имеющий порядок размерности системы, заменен на  $\ln N$ ;

- изучены модели массового обслуживания с групповым поступлением и обслуживанием требований, для которых получены оценки устойчивости, что позволило провести построение предельных характеристик для более сложных близких к ним нестационарных систем обслуживания.

**Теоретическая и практическая значимость.** Полученные в работе результаты могут быть использованы при построении и исследовании стохастических моделей конкретных задач в телекоммуникационных системах, системах страхования, статистической физике, химической кинетике, популяционной биологии.

**Достоверность и обоснованность полученных результатов.** Достоверность результатов определяется их строгими доказательствами, а также подтверждается численными расчетами и вычислительным экспериментом.

### **Результаты, выносимые на защиту.**

1. Получены общие оценки устойчивости нестационарных марковских систем обслуживания с катастрофами.
2. На основании общего подхода получены оценки устойчивости систем обслуживания  $M_t/M_t/S$  с катастрофами.
3. Получены оценки устойчивости для систем обслуживания  $M_t/M_t/N/N$  и  $M_t/M_t/N/N + R$ .
4. Получены оценки устойчивости для класса марковских систем обслуживания с групповым поступлением и обслуживанием требований.
5. На основании полученных оценок проведено построение предельных характеристик для конкретных моделей систем обслуживания.

**Содержание работы.** Во введении содержатся обоснование актуальности темы, цель работы, методика исследования, краткий обзор результатов других авторов, краткое содержание работы. Диссертация состоит из пяти глав, разбитых на параграфы.

**Во введении** дается обоснование актуальности темы диссертации, содержится краткий обзор работ по ее тематике, сформулированы основные результаты, полученные в работе.

**В главе 1** рассматривается математический аппарат, необходимый для построения и исследования моделей, изучаемых далее. В ней вводятся определение предельного среднего, понятие устойчивости процесса, приводится пространство  $l_1$ , логарифмическая норма оператора, и кроме того, приводятся важные для дальнейшего понятия и методы исследования.

**В §1 главы 2** получены оценки устойчивости для систем массового обслуживания с катастрофами, когда интенсивности катастроф не зависят от числа требований в системе. Приведены примеры.

**В §2 главы 2** получены оценки устойчивости для векторов состояний и средних для модели с катастрофами, когда интенсивности катастроф зависят от числа требований в системе, но являются существенными. Получена аппроксимация, приведены примеры.

**В §3 главы 2** изучается модель системы обслуживания  $M(t)/M(t)/S$  с катастрофами в случае, когда интенсивности катастроф зависят от числа требований в системе обслуживания. Получены достаточно общие условия, гарантирующие наличие слабой эргодичности для процесса, описывающего число требований в такой системе обслуживания, и исследован вопрос устойчивости таких процессов.

**В главе 3** получены новые оценки сходимости и более простые оценки устойчивости нестационарной системы  $M_t/M_t/N/N$ . Рассмотрены примеры.

**В главе 4** рассмотрена модель обслуживания  $M_t/M_t/N/N + R$ . Получены общие оценки сходимости и устойчивости и оценки устойчивости для конкретных случаев. Рассмотрены примеры.

**В §1 главы 5** рассмотрена система массового обслуживания, число требований в которой описывается нестационарной марковской цепью с непре-

рывным временем и конечным пространством состояний, причем требования могут поступать и обслуживаться группами. Получены оценки скорости сходимости и устойчивости, проведена аппроксимация.

**В §2 главы 5** рассмотрена система массового обслуживания, число требований в которой описывается нестационарной марковской цепью с непрерывным временем и бесконечным пространством состояний, причем требования могут поступать и обслуживаться группами.

**В приложении** приведено описание программы для построения характеристик марковского процесса.

**Апробация результатов.** Результаты работы докладывались на: семинарах кафедры прикладной математики ВГПУ "Стохастические модели сложных систем" (2009-2013),

IV ежегодных смотрах-сессиях аспирантов и молодых ученых по отраслям наук (Вологда, 2010),

международной летней конференции по вероятности и статистике (Болгария, Созополь, 2010),

International Conference on Ultra Modern Telecommunications (Москва, 2010),

5th International ICST Conference on Performance Evaluation Methodologies and Tools (South of Paris, France, May 16-20, 2011),

международной конференции, посвященной 110-той годовщине И.Г. Петровского (Москва, 2011),

международной научной конференции "Современные вероятностные методы анализа, проектирования и оптимизации информационно-телекоммуникационных сетей" (Queues: Flows, Systems, Networks, Минск, Беларусь, 2011),

международной конференции "Теория вероятностей и ее приложения" (Москва, 2012),

международной конференции "Современная стохастика: теория и применения III"(Modern Stochastics: Theory and Applications III, Киев, Украина, 2012),

XXIX международном семинаре по проблемам устойчивости стохастических моделей (Светлогорск, 2012),

международной научной конференции "Современные вероятностные методы анализа, проектирования и оптимизации информационно-телекоммуникационных сетей"(Queues: Flows, Systems, Networks, Минск, Беларусь, 2013).

Основные результаты опубликованы в [60]-[76].

# Глава 1

## Основные понятия

Данная глава является вспомогательной и результаты ее не претендуют на новизну. В ней вводятся необходимые для дальнейших исследований понятия и приведен основной математический аппарат.

### 1.1 Пространство $l_1$

Рассмотрим пространство  $l_1$  - множество всех последовательностей  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots\}$ ,  $x_i \in R$ , для которых  $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$ . Нормой вектора  $\mathbf{x}$  в данном пространстве называется величина  $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$  и обозначается  $\|\mathbf{x}\|$  ( $l_1$ -норма).  $l_1$  - линейное пространство, полное относительно метрики  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  (*банахово пространство*).

Единичные векторы (орты)  $l_1$  обозначаются через  $e_i$  ( $e_i$  - вектор, у которого  $i$ -й член соответствующей последовательности 1, а остальные - нули). Тогда каждый вектор  $\mathbf{x} \in l_1$  можно представить в виде  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cdot e_i$ , причем  $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty$ .

Рассмотрим отображение  $A$  из  $l_1$  в себя. Тогда этот оператор однозначно определяется матрицей  $(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ . Норма оператора вычисляется по следую-

щей формуле:

$$\|A\| = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \|A\mathbf{x}\| / \|\mathbf{x}\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\| = \sup_j \sum_i |a_{ij}|.$$

Будут рассматриваться только ограниченные операторы, то есть такие операторы, для которых выполняется условие

$$\|A\| = \sup_j \sum_i |a_{ij}| < \infty.$$

Пусть каждому  $t \geq 0$  ставится в соответствие вектор  $\mathbf{x} \in l_1$ . Тогда говорят, что задана вектор-функция  $\mathbf{x}(t)$ . Вектор-функция называется непрерывной (в точке  $t_0$ ), если при  $t \rightarrow t_0$

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0)\| \rightarrow 0.$$

Понятие дифференцируемости в точке и понятие интеграла от вектор-функции вводится соответственно через предел отношения и интегральные суммы. Аналогично вводятся понятия оператор-функции, ее непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости.

Рассмотрим понятие показательной функции вида  $e^{tF}$ . Оно вводится следующим образом

$$e^{tF} = I + (tF) + (tF)^2/2! + (tF)^3/3! + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tF)^n}{n!}.$$

Ряд, стоящий в правой части, сходится при любом  $t$ , что следует из сходимости ряда из норм

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{(tF)^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|F\|^n}{n!} = e^{t\|F\|}.$$

Мы получили, что

$$\|e^{tF}\| \leq e^{t\|F\|}.$$

Можно доказать, что при любых действительных  $t, s$  справедливо равенство

$$e^{(t+s)F} = e^{tF} \cdot e^{sF}.$$

Из последнего равенства при  $s = -t$  вытекает, что оператор  $e^{tF}$  обратим при любом  $t$ .

## 1.2 Дифференциальные уравнения в пространстве $l_1$

Рассмотрим дифференциальное уравнение в пространстве последовательностей  $l_1$

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y(t) + f(t) \quad (1.2.1)$$

и соответствующее ему однородное

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t),$$

где  $x(t), y(t), f(t)$  - вектор функции из  $R^+$  в  $l_1$ , а  $A(t)$  - оператор  $l_1$  в  $l_1$ .

Назовем  $U(t, \tau)$  - оператором Коши дифференциальных уравнений, где

$$U(t, \tau) = I + \int_{\tau}^t A(s_1)ds_1 + \int_{\tau}^t A(s_1) \int_{\tau}^{s_1} A(s_2)ds_2ds_1 + \dots,$$

при этом ряд в правой части сходится равномерно на любом конечном отрезке и

$$U(t, s) = U(t, \tau)U(\tau, s).$$

**Теорема 1.** Пусть  $A(t), f(t)$  - непрерывны,  $\tau \geq 0$  и  $y^* \in l_1$ . Тогда существует, причем единственная  $y(t)$ , определенная на  $[\tau, \infty)$  и такая, что:

- 1)  $y(\tau) = y^*$ ;
- 2)  $y(t)$  непрерывна и дифференцируема при всех  $t \geq \tau$ .

**Теорема 2.**

Пусть  $A(t), f(t)$  - непрерывны,  $\tau \geq 0$  и  $x^*, y^* \in l_1$ . Тогда существуют единственные  $x(t), y(t)$ , определенные на  $[\tau, \infty)$  и такие, что:

$$x(\tau) = x^*, y(\tau) = y^*,$$

$$\begin{aligned}
x(t) &= U(t, \tau)x(\tau), \\
y(t) &= U(t, \tau)y(\tau) + \int_{\tau}^t U(t, s)f(s)ds.
\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

### 1.3 Логарифмическая норма оператора

Понятие логарифмической нормы для конечных матриц введено и изучено Лозинским; на случай оператор-функций оно обобщено в [9]. Ниже приводятся само это понятие и важные оценки связанные с ним.

#### Определение 1.

*Число*

$$\gamma(A(t)) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\|U(t, t+h)\| - \|U(t, t)\|}{h}$$

*называется логарифмической нормой оператора  $A$ .*

**Теорема 3.** *При всех  $t > 0$  существует  $\gamma(A(t))$ , причем*

$$\gamma(A(t)) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\|I + hA(t)\| - 1}{h} \tag{1.3.3}$$

#### Следствие 1.

$$\gamma(A(t)) = \sup_j \left( a_{jj} + \sum_{i \neq j} |a_{ji}(t)| \right).$$

#### Теорема 4.

*Для любых  $t, s$  ( $t \geq s \geq 0$ ) выполняется неравенство:*

$$e^{-\int_s^t \gamma(-A(\tau))d\tau} \leq \|U(t, s)\| \leq e^{\int_s^t \gamma(A(\tau))d\tau}.$$

#### Теорема 5.

*Свойство неотрицательности:  $U(t, s) \geq 0$  при всех  $t \geq s \geq 0$  - равносильно тому, что  $a_{ij}(u) \geq 0$  при всех  $i, j$  таких, что  $i \neq j$ , и любом  $u \geq 0$ .*

Рассмотрим случай подпространства в  $l_1$ . Пусть матрица  $D$  образована элементами последовательности  $\{d_i\}$  и  $d = \inf_{i \geq 0} d_i > 0$ .

Пусть  $l_{1D}$  - пространство последовательностей  $\mathbf{z} = (p_0, p_1, p_2, \dots)$  таких, что  $\|\mathbf{z}\|_{l_{1D}} = \|D\mathbf{z}\|_1 < \infty$ .

### Теорема 6.

Пусть  $B : l_1 \rightarrow l_1$  - линейный оператор. Пусть  $B$  действует на векторы из  $l_{1D}$ , тогда

$$\|B\|_{l_{1D}} = \|DBD^{-1}\|_{l_1}, \quad (1.3.4)$$

$$\gamma(B)_{l_{1D}} = \gamma(DBD^{-1})_{l_1}. \quad (1.3.5)$$

## 1.4 Марковские цепи

### 1.4.1 Основные понятия

Рассмотрим систему  $S$ , которая может находиться в момент  $t$  в одном из состояний с номерами  $0, 1, \dots$ . Множество  $E = \{0, 1, \dots\}$  называется пространством состояний системы  $S$ . Пусть  $X(t)$  - состояние системы в момент  $t$ . Предположим, что если  $X(t) = i$ , то при  $h > 0$   $X(t+h) = j$  с вероятностью

$$\begin{cases} q_{ij}(t)h + o_{ij}(h), j \neq i, \\ 1 - \sum_{k \neq i} q_{ik}(t)h + o_i(h), j = i, \end{cases} \quad (1.4.6)$$

где все  $o_i(h)$  равномерны по  $i$ , т.е.  $\sup_i |o_i(h)| = o(h)$ .

Отметим, что это условие является довольно жестким, и подчеркнем, что будем рассматривать только процессы, удовлетворяющие этому условию. Будем называть их марковскими цепями с непрерывным временем и счетным пространством состояний. Назовем  $q_{ij}(t)$  интенсивностью перехода из состояния  $i$  в состояние  $j$ . Марковскую цепь  $X(t)$  назовем стационарной, если все  $q_{ij}(t) = q_{ij}$ , т.е. не зависят от  $t$ , и нестационарной - в противном случае.

Положим  $q_{ii}(t) = -\sum_{k \neq i} q_{ik}(t)$  и назовем матрицу  $Q(t) = (q_{ij}(t))_{i,j=0}^{\infty}$  матрицей интенсивностей для марковской цепи  $X(t)$ .

Введем в рассмотрение переходные вероятности  $p_{ij}(t, s) = \Pr(X(t) = j | X(s) = i)$ ; вероятности состояний  $p_i(t) = \Pr(X(t) = i)$  и вектор-столбец вероятностей состояний  $\mathbf{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots)^T$ . Положим  $a_{ij}(t) = q_{ji}(t)$  и рассмотрим матрицу  $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=0}^{\infty} = Q^T(t)$ . Тогда получим  $\mathbf{p}(t+h) = \mathbf{p}(t) + Ah\mathbf{p}(t) + o(h)$ , откуда вытекает прямая система Колмогорова в виде дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A(t)\mathbf{p}. \quad (1.4.7)$$

Пусть  $U(t, s)$  - оператор Коши дифференциального уравнения (1.4.7); тогда  $P(s, t) = U^T(t, s) = (p_{ij}(s, t))_{i,j=0}^{\infty}$  называется матрицей перехода  $X(t)$ . Обозначим через  $\Omega$  множество всех стохастических векторов, т.е.  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots)^T \in \Omega$  означает, что  $\mathbf{x} \geq 0$  и  $\|\mathbf{x}\| = 1$ .

### Теорема 7.

(i) При каждом  $s \geq 0$ ,  $t \geq s$  и любом  $\mathbf{p} \in l_1$  существует единственное  $\mathbf{p}(t)$  такое, что  $\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}$ . При этом  $\mathbf{p}(t) = U(t, s)\mathbf{p}(s)$ ;

(ii) если  $\mathbf{p}(s) \in \Omega$ , то и  $\mathbf{p}(t) \in \Omega$  при  $t \geq s$ ;

(iii) уравнение (1.4.7) устойчиво, а  $\|\mathbf{p}^1(t) - \mathbf{p}^2(t)\|$  монотонно не возрастает при любых начальных условиях, где  $\mathbf{p}^1(t), \mathbf{p}^2(t)$  являются решениями, соответствующие начальным условиям  $\mathbf{p}^1(s), \mathbf{p}^2(s)$  соответственно.

**Определение 2.** Назовем матрицу  $H = (h_{ij})_0^{\infty}$  стохастической, если все ее элементы неотрицательны, а сумма элементов каждого столбца равна единице.

**Следствие 2.** Для любых  $s \geq 0, t \geq s$  матрица Коши  $U(t, s)$  является стохастической.

**Определение 3.** Марковскую цепь  $X(t)$  назовем слабо эргодичной, если при любых начальных условиях  $\mathbf{p}^*(0) \in \Omega$ ,  $\mathbf{p}^{**}(0) \in \Omega$  будет  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| = 0$ . В этом случае любое  $\mathbf{p}^*(t)$  называется квазистационарным распределением марковской цепи  $X(t)$ .

**Определение 4.** Марковскую цепь назовем  $X(t)$  эргодичной (сильно эргодичной), если существует вектор  $\pi \in \Omega$  такой, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \pi\| = 0$  при любом  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p} \in \Omega$ . При этом вектор  $\pi$  называется стационарным распределением марковской цепи  $X(t)$ .

Обозначим через  $E(t, k) = E\{X(t) | X(s) = k\}$  математическое ожидание процесса в момент  $t$  при условии, что в момент времени  $s$  он находится в состоянии  $k$ , иногда будет встречаться также несколько более общее выражение  $E_{\mathbf{p}}(t)$  - это математическое ожидание процесса в момент  $t$  при начальном распределении вероятностей состояний  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}$ .

**Определение 5.** Марковская цепь  $X(t)$  имеет предельное среднее  $\phi(t)$ , если при любом  $k$  выполнено условие  $|E(t; k) - \phi(t)| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

**Определение 6.** Если предел

$$E = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t E\{X(u) | X(0) = k\} du, \quad (1.4.8)$$

существует и не зависит от  $k$ , то  $E$  называется двойным средним для цепи  $X(t)$ .

Предельное среднее показывает среднее количество в момент времени при достаточно больших  $t$ . Начальное состояние системы не оказывает влияние на предельное среднее.

Двойное среднее является некоторой средней характеристикой системы на всем промежутке ее существования.

### 1.4.2 Процессы рождения и гибели с катастрофами

Частным случаем марковской цепи с непрерывным временем является процесс рождения и гибели с катастрофами.

Пусть имеется популяция, размер которой  $X(t)$ . Интенсивности рождения, гибели и катастрофы соответственно  $\lambda_n(t)$ ,  $\mu_n(t)$  и  $\xi_n(t)$ .

Введем в рассмотрение переходные вероятности

$$p_{ij}(t, s) = \Pr(X(t) = j | X(s) = i);$$

вероятности состояний

$$p_i(t) = \Pr(X(t) = i)$$

и вектор-столбец вероятностей состояний

$$\mathbf{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots)^T.$$

Положим  $\lambda_{-1}(t) = \mu_0(t) = 0$ , тогда при всех  $i$  получаем

$$p_i(t+h) = \lambda_{i-1}(t)p_{i-1}(t)h + \mu_{i+1}(t)p_{i+1}(t)h + (1 - (\lambda_i(t) + \xi_i(t) + \mu_i(t))h)p_i(t) + o(h) \quad (1.4.9)$$

Отсюда получаем, перенося  $p_i(t)$  в левую часть, разделив на  $h$  и устремив  $h$  к нулю:

$$\frac{dp_i}{dt} = \lambda_{i-1}(t)p_{i-1} + \mu_{i+1}(t)p_{i+1} - (\lambda_i(t) + \xi_i(t) + \mu_i(t))p_i(t). \quad (1.4.10)$$

Рассмотрим матрицу интенсивностей процесса  $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=0}^{\infty}$ , где интенсивности катастроф не зависят от числа требований в системе и

$$a_{ij}(t) = \begin{cases} \lambda_{i-1}(t), & \text{если } j = i-1, \\ \mu_{i+1}(t), & \text{если } j = i+1, \\ -(\lambda_i(t) + \mu_i(t) + \xi(t)), & \text{если } j = i, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.4.11)$$

Прямая система Колмогорова для вероятностей состояний

$$\begin{cases} \frac{dp_0}{dt} = -(\lambda_0(t) + \xi(t))p_0 + \mu_1(t)p_1 + \xi(t), \\ \frac{dp_k}{dt} = \lambda_{k-1}(t)p_{k-1} - (\lambda_k(t) + \mu_k(t) + \xi(t))p_k + \mu_{k+1}(t)p_{k+1}, k \geq 1 \end{cases} \quad (1.4.12)$$

или в виде дифференциального уравнения

$$\frac{dp}{dt} = A(t)p + g(t), \quad t \geq 0, \quad (1.4.13)$$

в пространстве последовательностей  $l_1$ , где  $g(t) = (\xi(t), 0, 0, \dots)^T$ ,  $\mathbf{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots)^T$  - вектор-столбец вероятностей состояний, а  $A(t)$  - матрица интенсивностей.

### 1.4.3 Возмущенные процессы

**Определение 7.** Марковскую цепь  $X(t)$  назовем устойчивой, если при любом  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$  такое, что из условия  $\sup_{t \geq 0} \|A(t) - \bar{A}(t)\| < \delta$  вытекает неравенство  $\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| < \varepsilon$  для всех  $\mathbf{p}(0) = \bar{\mathbf{p}}(0) = \mathbf{p} \in \Omega$ .

Докажем теорему, необходимую для проведения дальнейших оценок и основанную на подходе Митрофанова (см.[43]).

**Теорема 8.** Если существуют такие константы  $b > 0, c > 1$ , что

$$\|\mathbf{p}^1(t) - \mathbf{p}^2(t)\| \leq ce^{-b(t-s)}, \quad (1.4.14)$$

то справедлива следующая оценка для любых начальных условий  $\mathbf{p}(s), \bar{\mathbf{p}}(s)$

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \begin{cases} \|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\| + \|A - \bar{A}\|(t-s), & 0 < t-s \leq b^{-1} \ln \frac{c}{2}, \\ \|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\|\beta(t,s) + \|A - \bar{A}\|b^{-1}(\ln \frac{c}{2} + 1 - \frac{c}{2}e^{-b(t-s)}), & t-s \geq b^{-1} \ln \frac{c}{2}. \end{cases} \quad (1.4.15)$$

Также

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq b^{-1}(\ln \frac{c}{2} + 1)\|A - \bar{A}\|. \quad (1.4.16)$$

**Доказательство.**

Для описания процесса  $X = X(t)$  справедливо дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \bar{A}(t)\mathbf{p}(t) \quad (1.4.17)$$

Выпишем прямую систему Колмогорова, соответствующую возмущенному процессу  $\bar{X} = \bar{X}(t)$ :

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \bar{A}(t)\bar{\mathbf{p}}(t) \quad (1.4.18)$$

Введем обозначение:

$$\hat{A}(t) = A(t) - \bar{A}(t).$$

Перепишем систему (4.2.10) в виде

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = A(t)\bar{\mathbf{p}}(t) - \hat{A}(t)\bar{\mathbf{p}}(t). \quad (1.4.19)$$

Получаем

$$\mathbf{p}(t) = U(t, s)\mathbf{p}(s), \quad (1.4.20)$$

$$\bar{\mathbf{p}}(t) = U(t, s)\bar{\mathbf{p}}(s) - \int_s^t U(t, \tau)\hat{A}(\tau)\bar{\mathbf{p}}(\tau) d\tau. \quad (1.4.21)$$

Тогда

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\| \|U(t, s)\| + \int_s^t \|U(t, \tau)\hat{A}(\tau)\bar{\mathbf{p}}(\tau)\| d\tau. \quad (1.4.22)$$

Обозначим

$$\beta(t, s) = \sup_{\|v\|=1, \sum_i v_i=0} U(t, \tau)v(t) = \frac{1}{2} \sup_{j,i} \sum_k |p_{ik}(t, s) - p_{jk}(t, s)|. \quad (1.4.23)$$

$$\|U(t, \tau)\hat{A}(\tau)\bar{\mathbf{p}}(\tau)\| \leq \|\hat{A}(\tau)\| \|U(t, \tau)\hat{A}(\tau)\bar{\mathbf{p}}(\tau)\| \leq \|\hat{A}(\tau)\| \beta(\tau, s) \quad (1.4.24)$$

Для всех  $0 \leq s \leq t$  справедливо, что  $\beta(t, s) \leq 1$ , тогда

$$\int_s^t \beta(u, s) du \leq t. \quad (1.4.25)$$

С другой стороны,

$$\beta(t, s) \leq \frac{ce^{-b(t-s)}}{2}. \quad (1.4.26)$$

Вторая оценка лучше при  $t - s \geq b^{-1} \ln \frac{c}{2}$ .

Поэтому для  $t - s \geq b^{-1} \ln \frac{c}{2}$

$$\int_s^t \beta(u, s) du \leq \int_s^{b^{-1} \ln \frac{c}{2}} \beta(u, s) du + \int_{b^{-1} \ln \frac{c}{2}}^t \beta(u, s) du \leq b^{-1} \ln \frac{c}{2} + \int_{b^{-1} \ln \frac{c}{2}}^t \frac{c}{2} e^{-b(u-s)} du. \quad (1.4.27)$$

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\| \beta(t, s) + \|\hat{A}(\tau)\| b^{-1} \left( \ln \frac{c}{2} + 1 - \frac{c}{2} e^{-b(t-s)} \right). \quad (1.4.28)$$

## Глава 2

# Нестационарные системы обслуживания с катастрофами

Простейшие (стационарные) модели систем обслуживания с катастрофами начали рассматриваться не очень давно, см., например, [22]-[40]. В таких моделях предполагается, что если в системе обслуживания имеется ненулевое число требований, то с ненулевой интенсивностью возможна катастрофа, то есть потеря всех требований, с дальнейшим продолжением функционирования системы обслуживания.

### 2.1 Системы обслуживания с независимыми от числа требований в системе интенсивностями катастроф

Вопросы, связанные с устойчивостью неоднородных марковских цепей с непрерывным временем, впервые исследованы А.И. Зейфманом в [54], и затем более детально для нестационарных процессов рождения и гибели (ПРГ) в работах [1, 55]. Здесь будет исследована устойчивость класса моделей, описываемых нестационарными ПРГ с катастрофами, когда интенсивности катастроф не зависят от числа требований в системе обслуживания.

### 2.1.1 Введение

Пусть  $X = X(t)$ ,  $t \geq 0$  - ПРГ с катастрофами, а  $\lambda_n(t)$ ,  $\mu_n(t)$  и  $\xi(t)$  - интенсивности рождения, гибели и катастрофы соответственно.

Обозначим через  $p_{ij}(s, t) = Pr \{X(t) = j | X(s) = i\}$ ,  $i, j \geq 0$ ,  $0 \leq s \leq t$ , переходные вероятности процесса  $X = X(t)$ , а через  $p_i(t) = Pr \{X(t) = i\}$  - его вероятности состояний.

При выполнении естественных дополнительных условий (см., например, [11]) прямую систему Колмогорова для вероятностей состояний

$$\begin{cases} \frac{dp_0}{dt} = -(\lambda_0(t) + \xi(t))p_0 + \mu_1(t)p_1 + \xi(t), \\ \frac{dp_k}{dt} = \lambda_{k-1}(t)p_{k-1} - (\lambda_k(t) + \mu_k(t) + \xi(t))p_k + \mu_{k+1}(t)p_{k+1}, k \geq 1 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

можно записать в виде дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{A}(t) \mathbf{p} + g(t), \quad t \geq 0, \quad (2.1.2)$$

в пространстве последовательностей  $l_1$ , где  $g(t) = (\xi(t), 0, 0, \dots)^T$ ,  $\mathbf{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots)^T$  - вектор-столбец вероятностей состояний, а  $\mathbf{A}(t) = \{a_{ij}(t), t \geq 0\}$  - матрица, порождаемая системой (3.1.1), при этом элементы матрицы  $\mathbf{A}(t)$  определяются по формулам

$$a_{ij}(t) = \begin{cases} \lambda_{i-1}(t), & \text{если } j = i - 1, \\ \mu_{i+1}(t), & \text{если } j = i + 1, \\ -(\lambda_i(t) + \mu_i(t) + \xi(t)), & \text{если } j = i, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Далее предполагаем, что

$$\lambda_n(t) = \nu_n \lambda(t), \quad \mu_n(t) = \eta_n \mu(t), \quad t \geq 0, \quad n \in E, \quad (2.1.4)$$

где  $0 \leq \eta_n \leq M$ ,  $0 \leq \nu_n \leq M$ , а «базисные» функции  $\lambda(t)$ ,  $\mu(t)$  и  $\xi(t)$  локально интегрируемы на  $[0; \infty)$ , и (для простоты вычислений) ограничены, то есть

$$\lambda(t) + \mu(t) + \xi(t) \leq L < \infty \quad (2.1.5)$$

почти при всех  $t \geq 0$ , см. подробное рассмотрение в [51].

Обозначим через  $\Omega = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq 0, \|\mathbf{x}\|_1 = 1\}$  множество всех стохастических векторов.

Тогда

$$\|A(t)\|_1 = \sup_j \sum_i |a_{ij}(t)| \leq 2ML \quad (2.1.6)$$

почти при всех  $t \geq 0$ , а значит, задача Коши для уравнения (3.2.6) с начальным условием  $\mathbf{p}(0)$  имеет единственное решение

$$\mathbf{p}(t) = U(t)\mathbf{p}(0) + \int_0^t U(t, \tau)g(\tau) d\tau, \quad (2.1.7)$$

где  $U(t, s)$  - оператор Коши уравнения (3.2.6). При этом если  $\mathbf{p}(s) \in \Omega$ , то и  $\mathbf{p}(t) \in \Omega$  при любом  $t \geq s$ .

Рассмотрим теперь «возмущенный» ПРГ с катастрофами  $\bar{X} = \bar{X}(t)$ ,  $t \geq 0$ , обозначая через  $\bar{\lambda}_n(t)$ ,  $\bar{\mu}_n(t)$  и  $\bar{\xi}(t)$  его интенсивности рождения, гибели и катастрофы соответственно.

Введем обозначения:

$$\hat{\lambda}_n(t) = \bar{\lambda}_n(t) - \lambda_n(t), \quad \hat{\mu}_n(t) = \bar{\mu}_n(t) - \mu_n(t), \quad \hat{\xi}(t) = \bar{\xi}(t) - \xi(t).$$

Для простоты записи оценок будем предполагать, что возмущения «равномерно малы», то есть при всех  $n$  и почти всех  $t \geq 0$  выполняются неравенства

$$|\hat{\lambda}_n(t)| \leq \varepsilon_1, \quad |\hat{\mu}_n(t)| \leq \varepsilon_2, \quad |\hat{\xi}(t)| \leq \varepsilon_3. \quad (2.1.8)$$

### 2.1.2 Устойчивость вектора состояний

Выпишем прямую систему Колмогорова, соответствующую возмущенному процессу:

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \bar{A}(t)\bar{\mathbf{p}}(t) + \bar{g}(t) \quad (2.1.9)$$

Введем обозначения:

$$\hat{A}(t) = A(t) - \bar{A}(t), \quad \hat{g}(t) = g(t) - \bar{g}(t).$$

Перепишем систему (2.1.9) в виде

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = A(t)\bar{\mathbf{p}}(t) + g(t) - \hat{A}(t)\bar{\mathbf{p}}(t) - \hat{g}(t). \quad (2.1.10)$$

Получаем

$$\mathbf{p}(t) = U(t)\mathbf{p}(0) + \int_0^t U(t, \tau)g(\tau) d\tau, \quad (2.1.11)$$

$$\bar{\mathbf{p}}(t) = U(t)\bar{\mathbf{p}}(0) + \int_0^t U(t, \tau)g(\tau) d\tau - \int_0^t U(t, \tau) \left( \hat{A}(\tau)\bar{\mathbf{p}}(\tau) + \hat{g}(\tau) \right) d\tau. \quad (2.1.12)$$

В этом параграфе возможно рассмотрение непосредственно по норме  $l_1$ . Пусть  $\mathbf{p}(0) = \bar{\mathbf{p}}(0)$ , тогда

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \int_0^t \|U(t, \tau)\| \left( \|\hat{A}(\tau)\| \|\bar{\mathbf{p}}(\tau)\| + \|\hat{g}(\tau)\| \right) d\tau. \quad (2.1.13)$$

Имеем теперь

$$\|\bar{\mathbf{p}}(\tau)\| = 1, \quad \tau \geq 0, \quad (2.1.14)$$

и значит,

$$\left( \|\hat{A}(\tau)\| \|\bar{\mathbf{p}}(\tau)\| + \|\hat{g}(\tau)\| \right) \leq (2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_3) + \varepsilon_3 = 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3). \quad (2.1.15)$$

Далее, оценивая логарифмическую норму оператора  $A(t)$  в пространстве  $l_1$  (см. [13]), получаем

$$\gamma(A(t))_1 = \sup_i \left( a_{ii}(t) + \sum_{j \neq i} a_{ji}(t) \right) = -\xi(t) \quad (2.1.16)$$

(см. [13]). Тогда

$$\|U(t, s)\| \leq e^{-\int_s^t \xi(\tau) d\tau} \quad (2.1.17)$$

для всех  $0 \leq s \leq t$ , и получаем следующее утверждение.

**Теорема 9.** *При совпадении начальных условий для исходного и возмущенного ПРГ с катастрофами для всех  $t \geq 0$  справедлива следующая оценка*

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \int_0^t e^{-\int_{s_1}^t \xi(\tau) d\tau} ds_1. \quad (2.1.18)$$

**Следствие 3.** *Пусть  $\xi(t) \geq \xi > 0$  почти при всех  $t \geq 0$ . Тогда вместо (2.1.18) получаем:*

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{\xi}. \quad (2.1.19)$$

**Замечание 1.** *Более точные оценки отклонения можно получить, ослабив условия малости возмущений, и потребовав, чтобы вместо (2.1.8) выполнялись при всех  $n$  и почти всех  $t \geq 0$  неравенства*

$$|\hat{\lambda}_n(t)| \leq \varepsilon_1 \xi(t), \quad |\hat{\mu}_n(t)| \leq \varepsilon_2 \xi(t), \quad |\hat{\xi}(t)| \leq \varepsilon_3 \xi(t), \quad (2.1.20)$$

*а кроме того, чтобы было выполнено естественное условие сущестственности катастроф:*

$$\int_0^\infty \xi(\tau) d\tau = +\infty, \quad (2.1.21)$$

*см. подробнее [55].*

### 2.1.3 Оценка для среднего

Обозначим через  $E_k(t) = E\{X(t) | X(0) = k\}$  математическое ожидание процесса в момент  $t$  при условии, что в нулевой момент времени он находится в состоянии  $k$ , иногда будет встречаться также несколько более общее

выражение  $E_{\mathbf{p}}(t)$  - это математическое ожидание процесса в момент  $t$  при начальном распределении вероятностей состояний  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}$ .

Соответствующие выражения для возмущенного процесса будем обозначать через  $\bar{E}_k(t) = E \{ \bar{X}(t) | \bar{X}(0) = k \}$  и  $\bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)$  соответственно.

Легко видеть, что тогда  $|E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)| \leq \sum_k k |p_k(t) - \bar{p}_k(t)|$ . Поэтому в качестве основного в этом пункте выберем пространство последовательностей  $l_{1E} = \{ \mathbf{z} = (p_0, p_1, p_2, \dots) \} \in l_1$  таких, что  $\| \mathbf{z} \|_{1E} = \sum_k k |p_k| < \infty$ . К сожалению, в этой и связанных с ней нормах оценку типа (2.1.14) непосредственно получить не удастся, поэтому приходится выбирать другой способ дальнейших рассуждений.

Для получения более простых оценок будем предполагать, что найдутся  $\rho \in (0; 1)$  и натуральное  $k$  такие, что для всех  $n, t$  выполнено условие  $\frac{1}{k} \lambda_n(t) \leq (1 - \rho) \xi(t)$ .

Перепишем исходную систему (2.1.2) для невозмущенного процесса в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \bar{A}(t)\mathbf{p}(t) + \bar{g}(t) + \hat{A}(t)\mathbf{p}(t) + \hat{g}(t) \quad (2.1.22)$$

Тогда

$$\mathbf{p}(t) = \bar{U}(t, 0)\mathbf{p}(0) + \int_0^t \bar{U}(t, \tau) \bar{g}(\tau) d\tau + \int_0^t \bar{U}(t, \tau) \left( \hat{A}(\tau)\mathbf{p}(\tau) + \hat{g}(\tau) \right) d\tau, \quad (2.1.23)$$

и

$$\bar{\mathbf{p}}(t) = \bar{U}(t, 0)\bar{\mathbf{p}}(0) + \int_0^t \bar{U}(t, \tau) \bar{g}(\tau) d\tau. \quad (2.1.24)$$

А тогда в *любой* норме при одинаковых начальных условиях справедлива оценка:

$$\| \mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t) \| \leq \int_0^t \| \bar{U}(t, \tau) \| \left( \| \hat{A}(\tau) \| \| \mathbf{p}(\tau) \| + \| \hat{g}(\tau) \| \right) d\tau. \quad (2.1.25)$$

Рассмотрим теперь матрицу

$$D_k = \text{diag} \left( \underbrace{k, k, k, \dots, k}_{k+1}, k+1, k+2, \dots \right) \quad (2.1.26)$$

и соответствующее пространство последовательностей  $l_{1k} = \{\mathbf{z} = (p_0, p_1, p_2, \dots)\}$  таких, что  $\|\mathbf{z}\|_{1k} = \|D_k \mathbf{z}\|_1 < \infty$ . Тогда, очевидно, при любом целом неотрицательном  $k$  имеем  $\|\mathbf{z}\|_{1E} \leq \|\mathbf{z}\|_{1k}$ .

Оценивая логарифмическую норму  $\gamma(A(t))_{1k}$ , получаем

$$\gamma(A(t))_{1k} = \gamma(D_k A(t) D_k^{-1})_1 \leq \frac{M}{k} \lambda(t) - \xi(t) \leq -\rho \xi(t), \quad (2.1.27)$$

поскольку сумма по каждому из столбцов с номерами  $0, 1, \dots, k-1$  равна  $-\xi(t)$ , а если номер столба  $n \geq k$ , то сумма по этому столбцу есть

$$\frac{n+1}{n} \lambda_n(t) - (\lambda_n(t) + \mu_n(t) + \xi(t)) + \frac{n-1}{n} \mu_n(t) \leq \frac{1}{n} \lambda_n(t) - \xi(t) \leq \frac{M}{k} \lambda(t) - \xi(t)$$

Далее,

$$\|\hat{A}(t)\|_{1k} = \|D_k \hat{A}(t) D_k^{-1}\|_1 \leq \frac{2k+1}{k} \varepsilon_1 + \frac{2k-1}{k} \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \leq 3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (2.1.28)$$

А тогда

$$\gamma(\bar{A}(t))_{1k} \leq \gamma(D_k A(t) D_k^{-1})_1 + \|\hat{A}(t)\|_{1k} \leq -\rho \xi(t) + 3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (2.1.29)$$

Оценим теперь

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}(t)\|_{1k} &\leq \|U(t)\mathbf{p}(0)\|_{1k} + \int_0^t \|U(t, \tau)g(\tau)\|_{1k} d\tau \leq \\ &\leq e^{\int_0^t (-\rho \xi(u)) du} \|\mathbf{p}(0)\|_{1k} + k \int_0^t \xi(\tau) e^{\int_0^t (-\rho \xi(u)) du} d\tau \leq \|\mathbf{p}(0)\|_{1k} + \frac{k}{\rho} < \infty \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

при любом  $\mathbf{p}(0)$ , поскольку  $\|g(\tau)\|_{1k} = k\xi(\tau)$ .

Теперь, с учетом (2.1.25), имеем

$$\begin{aligned} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\mathbf{p}}(t)| &\leq \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\|_{1k} \leq \\ &\leq \left( (3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \left( \|\mathbf{p}(0)\|_{1k} + \frac{k}{\rho} \right) + k\varepsilon_3 \right) \int_0^t e^{-\int_\tau^t (\rho \xi(u) - 3\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3) du} d\tau. \end{aligned} \quad (2.1.31)$$

**Теорема 10.** При совпадении начальных условий для исходного и возмущенного ПРГ с катастрофами для всех  $t \geq 0$  справедлива оценка устойчивости среднего (2.1.31).

**Следствие 4.** Пусть  $\xi(t) \geq \xi > 0$  почти при всех  $t \geq 0$ , а  $X(0) = 0$ . Тогда вместо (2.1.31) получаем:

$$|E_0(t) - \bar{E}_0(t)| \leq \left( (3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \frac{k}{\rho} + k\varepsilon_3 \right) (\rho\xi - 3\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^{-1}. \quad (2.1.32)$$

**Замечание 2.** Более точные оценки отклонения можно получить, ослабив условия малости возмущений, см. (2.1.20) и (2.1.21).

#### 2.1.4 Примеры

В современных моделях, связанных с финансовой математикой, рассматриваются марковские цепи и их устойчивость, см. [21, 28, 36].

Рассмотрим здесь простейшую нестационарную модель, описывающую число клиентов страховой компании.

**Пример 1.**  $\lambda_{n-1}(t) = \lambda(t) = 5 + 5 \sin 2\pi t$ ,  $\mu_n(t) = \mu(t) = 5 + 5 \cos 2\pi t$ ,  $\xi(t) = 1 + \sin 2\pi t$ ,  $n \geq 1$ , а все  $\varepsilon_i = \varepsilon$ .

Применяя методы, описанные в наших предыдущих работах, и строя последовательность аппроксимирующих процессов так, как это предложено в [14], получаем следующее утверждение.

**Теорема 11.** Справедлива следующая оценка:

$$\text{при } X(0) = X_n(0) = 0$$

$$\|\pi(t) - \mathbf{p}_N(t)\|_1 \leq 2e^{-t} + \frac{42e^{8t}}{2^{N+3}} \quad (2.1.33)$$

при всех  $t \geq 0$  и любом  $N$ .

**Доказательство.** Отметим прежде всего, что

$$\|\pi(t) - \mathbf{p}_N(t)\|_1 \leq \|\pi(t) - \mathbf{p}(t)\|_1 + \|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_N(t)\|_1.$$

Воспользуемся вначале неравенством:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_1 &\leq e^{\int_0^t \gamma(A(\tau))_1 d\tau} \|\mathbf{p}^*(0) - \mathbf{p}^{**}(0)\|_1 \leq \\ e^{-\int_0^t (1 + \sin 2\pi\tau) d\tau} \|\mathbf{p}^*(0) - \mathbf{p}^{**}(0)\|_1 &\leq e^{-t} \|\mathbf{p}^*(0) - \mathbf{p}^{**}(0)\|_1. \end{aligned}$$

Теперь, выбирая  $\mathbf{p}^*(0) = \pi(0)$ ,  $\mathbf{p}^{**}(0) = \mathbf{p}(0) = \mathbf{e}_0$ , получаем первое слагаемое правой части. Теперь рассмотрим  $\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_N(t)\|_1$  для получения второго слагаемого. Будем отождествлять векторы  $(x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots)^T$  и  $(x_1, \dots, x_N)^T$ .

Рассмотрим прямую систему Колмогорова для исходного процесса в следующей форме:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A_N(t)\mathbf{p} + \mathbf{g}(t) + (A(t) - A_N(t))\mathbf{p}, \quad (2.1.34)$$

а также соответствующую систему

$$\frac{d\mathbf{p}_N}{dt} = A_N(t)\mathbf{p}_N + \mathbf{g}(t) \quad (2.1.35)$$

для усеченного процесса.

Имеем

$$\mathbf{p}_N(t) = U_N(t)\mathbf{p}(0) + \int_0^t U_N(t, \tau)\mathbf{g}(\tau) d\tau \quad (2.1.36)$$

при  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_N(0)$  и

$$\mathbf{p}(t) = U_N(t)\mathbf{p}(0) + \int_0^t U_N(t, \tau)\mathbf{g}(\tau) d\tau + \int_0^t U_N(t, \tau)(A(\tau) - A_N(\tau))\mathbf{p}(\tau) d\tau. \quad (2.1.37)$$

Тогда получаем

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_N(t)\| \leq \int_0^t \|U_N(t, \tau)\| \|(A(\tau) - A_N(\tau))\mathbf{p}(\tau)\| d\tau. \quad (2.1.38)$$

Далее  $\|U_N(t, \tau)\|_1 = 1$ , а

$$(A - A_N)\mathbf{p} = (0, \dots, 0, -\lambda_N p_N + \mu_{N+1} p_{N+1}, \lambda_N p_N - (\lambda_{N+1} + \mu_{N+1} + \xi) p_{N+1} + \mu_{N+2} p_{N+2}, \dots)^T \quad (2.1.39)$$

и

$$\|(A - A_N)\mathbf{p}\| \leq \|A\| \sum_{n \geq N} p_k = (21 + 11 \sin 2\pi t + 10 \cos 2\pi t) \sum_{n \geq N} p_n \leq 42 \sum_{n \geq N} p_n \quad (2.1.40)$$

С другой стороны,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{d(2^n p_n)}{dt} = \sum_{n \geq 0} 2^n (2\lambda_n - (\lambda_n + \mu_n + \xi) + \frac{\mu_n}{2}) p_n \leq \sum_{n \geq 0} 2^n (1.5 + 4 \sin 2\pi t - 2.5 \cos 2\pi t) p_n \quad (2.1.41)$$

и значит,

$$\frac{d(\sum_{n \geq 0} 2^n p_n)}{dt} \leq 8 \sum_{n \geq 0} 2^n p_n. \quad (2.1.42)$$

Отсюда

$$\sum_{n \geq 0} 2^n p_n(t) \leq e^{8t} \sum_{n \geq 0} 2^n p_n(0) = e^{8t} \quad (2.1.43)$$

и

$$2^N \sum_{n \geq N} p_n \leq \sum_{n \geq N} 2^n p_n \leq e^{8t}, \quad (2.1.44)$$

тогда

$$\sum_{n \geq N} p_n \leq \frac{e^{8t}}{2^N}. \quad (2.1.45)$$

Таким образом,

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_N(t)\| \leq \int_0^t \frac{42e^{8\tau}}{2^N} d\tau \leq \frac{42e^{8t}}{2^{N+3}}, \quad (2.1.46)$$

откуда получается второе слагаемое.

Теперь несложно проверить, что для построения предельного режима для невозмущенного процесса с точностью  $10^{-8}$  достаточно выбрать  $N = 273$ ,  $t \in [20, 21]$ .

**Теорема 12.** При  $X(0) = X_N(0) = 0$  справедлива оценка

$$|\phi(t) - E_{0,N}(t)| \leq \frac{ke^{-\rho t}}{\rho} + \frac{22e^{8t}}{2^N} \quad (2.1.47)$$

при всех  $t \geq 0$  и любом  $N \geq k$ .

**Доказательство.** Первое слагаемое правой части вытекает из неравенства

$$|E_k(t) - E_0(t)| \leq \|\mathbf{p}(t) - \pi(t)\|_{1E} \leq \|\mathbf{p}(t) - \pi(t)\|_{1k} \leq \|\pi(0)\|_{1k} e^{-\rho t}, \quad (2.1.48)$$

если предварительно выбрать  $\mathbf{p}^*(0) = \pi(0)$ ,  $\mathbf{p}^{**}(0) = \mathbf{p}(0) = \mathbf{e}_0$ , где  $\pi(t)$  - предельный режим, и воспользоваться рассуждениями предыдущей теоремы.

Оценим  $\|\pi(0)\|_{1k}$ . Имеем с учетом 1-периодичности:

$$\begin{aligned} \|\pi(0)\|_{1k} &\leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\pi(t)\|_{1k} \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left( \|\pi(0)\|_{1k} e^{-\rho \int_0^t \xi(u) du} + \int_0^t \|g(\tau)\|_{1k} e^{-\rho \int_\tau^t \xi(u) du} d\tau \right) \leq \\ &\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left( \|\pi(0)\|_{1k} e^{-\rho t} + k \int_0^t \xi(\tau) e^{-\rho \int_\tau^t \xi(u) du} d\tau \right) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{k}{\rho} (1 - e^{-\rho \int_0^t \xi(u) du}) \right) \leq \frac{k}{\rho}. \end{aligned} \quad (2.1.49)$$

Теперь рассмотрим  $|E_0(t) - E_{0,N}(t)|$  для получения второго слагаемого. В любой норме выполняется

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_N(t)\| = \left\| \int_0^t U_N(t, \tau) (A(\tau) - A_N(\tau)) \mathbf{p}(\tau) d\tau \right\|. \quad (2.1.50)$$

Рассмотрим матрицу Коши

$$U_N = \begin{pmatrix} u_{00}^N & . & . & u_{0N}^N & 0 & 0 & \dots \\ u_{10}^N & . & . & u_{1N}^N & 0 & 0 & \dots \\ \dots & & & & & & \\ u_{N0}^N & . & . & u_{NN}^N & 0 & 0 & \dots \\ 0 & . & . & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & . & . & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & & & & & & \end{pmatrix}. \quad (2.1.51)$$

Тогда

$$(A - A_N) \mathbf{p} = (0, \dots, 0, -\lambda_N p_N + \mu_{N+1} p_{N+1}, \lambda_N p_N - (\lambda_{N+1} + \mu_{N+1} + \xi) p_{N+1} + \mu_{N+2} p_{N+2}, \dots)^T \quad (2.1.52)$$

и, следовательно,

$$U_N (A - A_N) \mathbf{p} = \begin{pmatrix} u_{0N}^N (-\lambda_N p_N + \mu_{N+1} p_{N+1}) \\ u_{1N}^N (-\lambda_N p_N + \mu_{N+1} p_{N+1}) \\ \vdots \\ u_{NN}^N (-\lambda_N p_N + \mu_{N+1} p_{N+1}) \\ \lambda_N p_N - (\lambda_{N+1} + \mu_{N+1} + \xi) p_{N+1} + \mu_{N+2} p_{N+2} \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (2.1.53)$$

С учетом неравенств  $u_{ij}^N(t, \tau) \geq 0$  (при всех  $i, j, t, \tau$ ) и равенств  $\sum_i u_{ij}^N(t, \tau) = 1$  (при всех  $j, t, \tau$ ) получаем оценку

$$\begin{aligned} \|U_N(A - A_N)p\|_{1E} &= |-\lambda_N p_N + \mu_{N+1} p_{N+1}| \sum_{n \leq N} n u_{nN}^N + \\ &+ \sum_{n \geq N} (n+1) |\lambda_n p_n - (\lambda_{n+1} + \mu_{n+1} + \xi) p_{n+1} + \mu_{n+2} p_{n+2}| \leq \\ &\leq (2\lambda + 2\mu + \xi) \left( \sum_{n \geq N} n p_n + \sum_{n \geq N} p_n \right) \end{aligned}$$

Первое слагаемое уже оценено:  $\sum_{n \geq N} p_n \leq \frac{e^{8t}}{2^N}$ .

Рассмотрим первое слагаемое и оценим его аналогичным способом, учитывая, что  $2\lambda(t) - \mu(t) \leq 25$ ,

$$\frac{d(\sum_{n \geq 1} np_n)}{dt} \leq \lambda(t)p_0 + (\lambda(t) - \mu(t)) \sum_{n \geq 1} p_n - \xi(t) \sum_{n \geq 1} np_n \leq (\lambda(t) - \mu(t)) \frac{e^{8t}}{2^N} + \lambda(t) \frac{e^{8t}}{2^N} \leq \frac{25e^{8t}}{2^N}. \quad (2.1.54)$$

Тогда

$$\|U_N(A - A_N)p\|_{1E} \leq (2\lambda + 2\mu + \xi) \frac{e^{8t}}{2^N} \left( \frac{25}{8} + 1 \right), \quad (2.1.55)$$

и получаем

$$|E_0(t) - E_{0,n}(t)| \leq \frac{174}{2^N} \int_0^t e^{8\tau} d\tau \leq \frac{22e^{8t}}{2^N}. \quad (2.1.56)$$

Для построения предельного среднего невозмущенного процесса с точностью  $10^{-8}$  выбираем  $N = 341$ ,  $t \in [26, 27]$ , положив при этом  $\rho = 0.9$ ;  $k = 50$ .

Далее, в оценках устойчивости (2.1.18) получаем, выбирая  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$ ,

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq 6\varepsilon \int_0^t e^{-\int_\tau^t \xi(u) du} d\tau \leq 6\varepsilon e^{\frac{1}{\pi}} \quad (2.1.57)$$

и

$$|E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\mathbf{p}}(t)| \leq \left( \frac{6\varepsilon k}{\rho} + k\varepsilon \right) \int_0^t e^{-\int_\tau^t (\rho\xi(u) - 6\varepsilon) du} d\tau \leq \frac{\varepsilon k(\rho + 6)}{\rho(\rho - 6\varepsilon)} e^{\frac{\rho}{\pi}} \quad (2.1.58)$$

соответственно.

**Пример 2.** Пусть теперь при тех же интенсивностях поступления и обслуживания клиентов  $\lambda_{n-1}(t) = \lambda(t) = 5 + 5 \sin 2\pi t$ ,  $\mu_n(t) = \mu(t) = 5 + 5 \cos 2\pi t$ , интенсивность катастрофы  $\xi(t) = 2 + 2 \sin 2\pi t$  вдвое больше, чем в предыдущем примере.

Тогда тем же образом проверяется, что для получения требуемой точности предельного режима достаточно взять  $N = 127$ ,  $t \in [10, 11]$ , а для построения предельного среднего –  $N = 155$ ,  $t \in [13, 14]$ . При этом выписанные оценки устойчивости заведомо также выполнены.

Ниже построены предельные характеристики рассмотренных примеров.

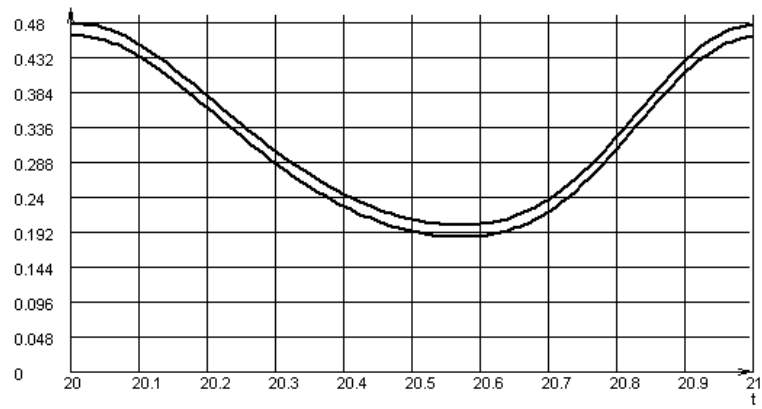


Рис. 2.1: Приближенное значение предельной величины  $J_0(t) = \Pr(X(t) = 0)$  (пример 1). Среднее значение по периоду приближенно равно 0,319

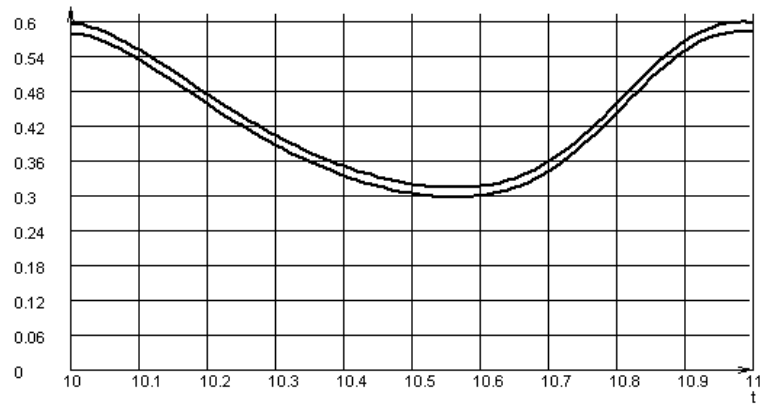


Рис. 2.2: Приближенное значение предельной величины  $J_0(t) = \Pr(X(t) = 0)$  (пример 2). Среднее значение по периоду приближенно равно 0,433

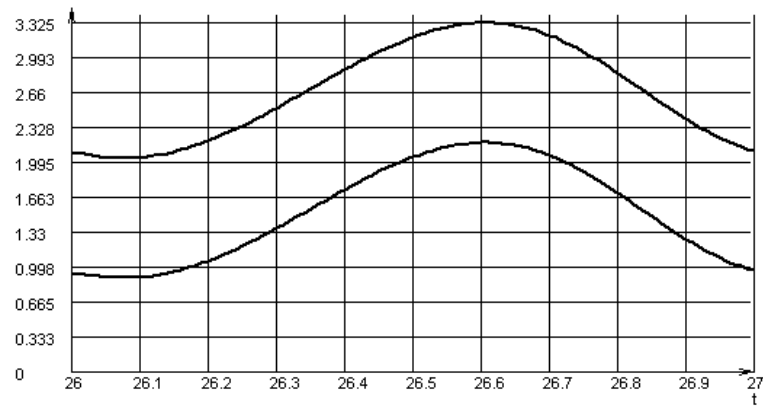


Рис. 2.3: Приближенное значение предельного среднего для возмущенного процесса (пример 1). Среднее значение по периоду - двойное среднее - приблизительно равно 2,100

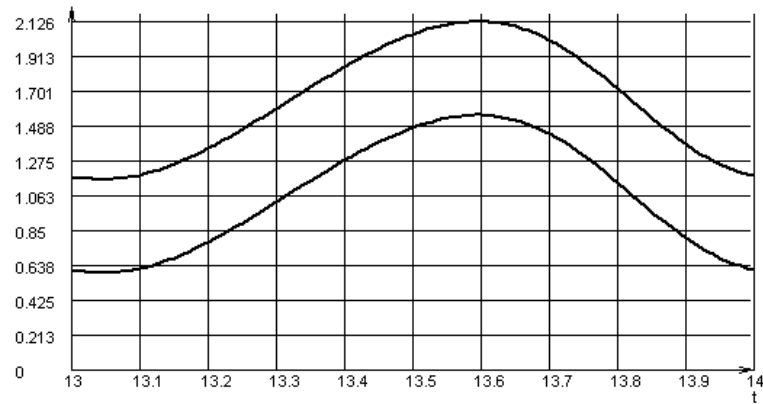


Рис. 2.4: Приближенное значение предельного среднего для возмущенного процесса (пример 2). Среднее значение по периоду - двойное среднее - приблизительно равно 1,357

## 2.2 Системы обслуживания с зависимыми от числа требований в системе интенсивностями катастроф

Здесь будет изучена более общая ситуация системы обслуживания, число требований в которой описывается марковской цепью с непрерывным временем и дискретным пространством состояний в той ситуации, когда интенсивности катастроф зависят от числа требований в системе, но являются существенными.

### 2.2.1 Введение

Пусть  $X = X(t)$ ,  $t \geq 0$  – ПРГ с катастрофами. Обозначим через  $p_{ij}(s, t) = Pr \{X(t) = j | X(s) = i\}$ ,  $i, j \geq 0$ ,  $0 \leq s \leq t$ , переходные вероятности процесса  $X = X(t)$ , а через  $p_i(t) = Pr \{X(t) = i\}$  – его вероятности состояний, через  $\xi_i(t)$  – интенсивность катастрофы при наличии  $i$  требований в системе, через  $a_{i+k,i}(t)$  – интенсивность поступления  $k$  требований в систему обслуживания, в которой уже есть  $i$  требований, и, наконец, через  $a_{i-k,i}(t)$  – интенсивность обслуживания  $k$  требований в системе обслуживания, в которой имеется  $i$  требований.

При выполнении естественных дополнительных условий (см., например, [11]) прямую систему Колмогорова для вероятностей состояний

$$\begin{cases} \frac{dp_0}{dt} = a_{00}(t)p_0 + \sum_{i \geq 1} (a_{0i}(t) + \xi_i(t))p_i, \\ \frac{dp_k}{dt} = (a_{kk}(t) - \xi_k(t))p_k + \sum_{i \neq k} a_{ki}(t)p_i, k \geq 1, \end{cases} \quad (2.2.59)$$

можно записать в виде дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{A}(t) \mathbf{p}, \quad t \geq 0, \quad (2.2.60)$$

в пространстве последовательностей  $l_1$ , где  $\mathbf{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots)^T$  – вектор-столбец вероятностей состояний, а  $\mathbf{A}(t) = \{a_{ij}(t), t \geq 0\}$  – матрица, порожд-

даемая системой (2.2.59). Тогда

$$\|A(t)\| = 2 \sup_j (|a_{jj}(t)| + \xi_i(t)) < \infty \quad (2.2.61)$$

почти при всех  $t \geq 0$ , а значит, задача Коши для уравнения (2.2.60) с начальным условием  $\mathbf{p}(0)$  имеет единственное решение

$$\mathbf{p}(t) = U(t)\mathbf{p}(0), \quad (2.2.62)$$

где  $U(t, s)$  - оператор Коши уравнения (2.2.60). При этом если  $\mathbf{p}(s) \in \Omega$ , то и  $\mathbf{p}(t) \in \Omega$  при любом  $t \geq s$ .

Рассмотрим теперь «возмущенный» ПРГ с катастрофами  $\bar{X} = \bar{X}(t)$ ,  $t \geq 0$ , обозначая все его характеристики так же, как и у невозмущенного процесса, с дополнительно чертой. Положим  $\hat{\mathbf{A}}(t) = \mathbf{A}(t) - \bar{\mathbf{A}}(t)$  и для простоты записи оценок будем предполагать, что возмущения «равномерно малы», то есть почти при всех  $t \geq 0$  выполняется неравенство

$$\|\hat{\mathbf{A}}(t)\| \leq \varepsilon. \quad (2.2.63)$$

### 2.2.2 Устойчивость для вектора состояний

**Теорема 13.** Пусть  $\xi_i(t) \geq \xi(t) \geq b > 0$  для всех  $i > 0$  и  $\int_0^\infty \xi(t)dt = +\infty$ . Для любых начальных условий  $p(s)$  и  $\bar{p}(s)$  процессов  $X(t)$  и  $\bar{X}(t)$  соответственно справедливо неравенство

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{b}. \quad (2.2.64)$$

**Доказательство.** Проведем преобразования в первом уравнении исходной системы для сведения ее к неоднородной:

$$\frac{dp_0}{dt} = -(a_{00} + \xi(t))p_0 + \sum_{i=0} (a_{0i}(t) + \xi_i(t) - \xi(t))p_i + \xi(t), \quad (2.2.65)$$

где  $\xi_i(t) \geq \xi(t) > 0$ .

Теперь уравнение можно записать так

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = B(t) + \mathbf{f}(t), \quad (2.2.66)$$

причем матрица  $B(t)$  отличается только первой строкой очевидным образом от матрицы  $A(t)$ , а  $\mathbf{f}(t) = (\xi(t), 0, \dots)^T$ .

Получаем

$$\mathbf{p}(t) = V(t)\mathbf{p}(0) + \int_0^t V(t, \tau)\mathbf{f}(\tau) d\tau, \quad (2.2.67)$$

где  $V(t, \tau)$  - оператор Коши уравнения (2.2.66).

Далее, оценивая логарифмическую норму оператора  $B(t)$  в пространстве  $l_1$  (см. [13]), получаем

$$\gamma(B(t))_1 = \max \left( a_{00}(t) - \xi(t) + \sum_{i \geq 1} a_{i0}(t), \sup_{i \geq 1} \left( a_{ii}(t) - \xi_i(t) + a_{0i}(t) + \xi_i(t) - \xi(t) + \sum_{j \neq i, j \geq 1} a_{ji}(t) \right) \right) = -\xi(t) \quad (2.2.68)$$

Тогда для всех  $0 \leq s \leq t$

$$\|V(t, s)\| \leq e^{-\int_s^t \xi(\tau) d\tau}, \quad (2.2.69)$$

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq e^{-\int_s^t \xi(\tau) d\tau} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\| \leq 2e^{-\int_s^t \xi(\tau) d\tau} \leq 2e^{-b(t-s)}. \quad (2.2.70)$$

Применим теорему 8. Тогда

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \beta(t, s) \|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\| + \int_s^t \|\hat{A}(u)\| \beta(u, s) du. \quad (2.2.71)$$

В итоге имеем

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \begin{cases} \|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\| + (t-s)\varepsilon, & 0 < t < b^{-1} \ln \frac{c}{2}, \\ b^{-1}(\ln \frac{c}{2} + 1 - \frac{c}{2}e^{-b(t-s)})\varepsilon + \frac{c}{2}e^{-b(t-s)}\|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\|, & t \geq b^{-1} \ln \frac{c}{2} \end{cases} \quad (2.2.72)$$

Значит, в рассматриваемой ситуации (при  $c = 2$ ) из (2.2.72) при всех  $t \geq s$  вытекает оценка

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq b^{-1}(1 - e^{-b(t-s)})\varepsilon + e^{-b(t-s)}\|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\|, \quad (2.2.73)$$

из которой и следует утверждение теоремы.

**Теорема 14.** Пусть  $a_{ij}(t)$  и  $\xi_i(t)$  1-периодичны. Пусть  $\xi_i(t) \geq \xi(t)$  при всех  $i \geq 0$  и почти всех  $t \in [0, 1]$  и существует положительное число  $\theta \leq \int_0^1 \xi(t) dt$ . Тогда для любых начальных условий  $\mathbf{p}(s)$  и  $\bar{\mathbf{p}}(s)$  процессов  $X(t)$  и  $\bar{X}(t)$  соответственно справедливо неравенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{\varepsilon(1 + \theta)}{\theta}. \quad (2.2.74)$$

Для доказательства отметим, что теперь вместо (2.2.70) справедлива оценка скорости сходимости

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq 2e^{-\int_s^t \xi(\tau) d\tau} \leq 2e^\theta e^{-\theta(t-s)} \quad (2.2.75)$$

и, следовательно, получаем из (2.2.72) следующее неравенство

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \theta^{-1}(\theta + 1 - e^\theta e^{-\theta(t-s)})\varepsilon + e^\theta e^{-\theta(t-s)}\|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\|. \quad (2.2.76)$$

**Замечание 3.** Отметим, что выписанные оценки устойчивости справедливы, разумеется, и в случае конечного пространства состояний.

### 2.2.3 Оценки для среднего

Обозначим через  $E_k(t) = E\{X(t) | X(0) = k\}$  математическое ожидание процесса в момент  $t$  при условии, что в нулевой момент времени он находится в состоянии  $k$ , иногда будет встречаться также несколько более общее выражение  $E_{\mathbf{p}}(t)$  – это математическое ожидание процесса в момент  $t$  при начальном распределении вероятностей состояний  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}$ .

Легко видеть, что тогда  $|E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)| \leq \sum_k k |p_k(t) - \bar{p}_k(t)|$ , а значит, если пространство состояний системы конечно (общее число требований в системе

обслуживания не превосходит  $S < \infty$ ), то  $|E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)| \leq S\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\|$ . А тогда из вышедоказанных теорем сразу вытекают оценки устойчивости средних:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)| \leq \frac{\varepsilon S}{b}, \quad (2.2.77)$$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)| \leq \frac{\varepsilon S(1 + \theta)}{\theta}. \quad (2.2.78)$$

Основные трудности в этом параграфе связаны с ситуацией, когда количество возможных состояний системы очень велико или бесконечно. Для получения оценок устойчивости среднего здесь приходится использовать специальные перенормировки. Рассмотрим новое пространство последовательностей  $l_D = \{\mathbf{z} = (p_0, p_1, p_2, \dots)\}$  таких, что  $\|\mathbf{z}\|_D = \|D\mathbf{z}\|_1 < \infty$ , где матрица  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots)$ . Будем считать, что количество поступающих требований не больше  $N$ .

Перепишем исходную систему (2.2.66) для невозмущенного процесса в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \bar{\mathbf{B}}(t)\mathbf{p}(t) + \bar{\mathbf{f}}(t) + \hat{\mathbf{B}}(t)\mathbf{p}(t) + \hat{\mathbf{f}}(t). \quad (2.2.79)$$

Тогда

$$\mathbf{p}(t) = \bar{V}(t, 0)\mathbf{p}(0) + \int_0^t \bar{V}(t, \tau)\bar{\mathbf{f}}(\tau) d\tau + \int_0^t \bar{V}(t, \tau) \hat{B}(\tau)p(\tau) \quad (2.2.80)$$

и

$$\bar{\mathbf{p}}(t) = \bar{V}(t, 0)\bar{\mathbf{p}}(0) + \int_0^t \bar{V}(t, \tau)\bar{\mathbf{f}}(\tau) d\tau. \quad (2.2.81)$$

А тогда в *любой* норме при одинаковых начальных условиях справедлива оценка:

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \int_0^t \|\bar{V}(t, \tau)\| \left( \|\hat{B}(\tau)\| \|\mathbf{p}(\tau)\| + \|\hat{\mathbf{f}}(\tau)\| \right) d\tau. \quad (2.2.82)$$

Будем теперь дополнительно предполагать, что существуют числа  $K, N$  такие, что

$$\xi(t) \leq K < \infty, \quad \sup_i |a_{ii}(t)| \leq K$$

почти при всех  $t \geq 0$ ;

$$a_{i+k,i}(t) = 0$$

при всех  $k \geq N$  и почти при всех  $t \geq 0$ .

**Теорема 15.** Пусть выполнены условия теоремы 13. Пусть существует возрастающая последовательность положительных чисел  $\{d_i\}$  такая, что  
 а)  $\inf_{k \geq 1} (d_j/k) = \omega > 0$ ;    б)  $\sup_k (d_{k+1}/d_k) = m < \infty$ ;    с)  $b - (m^N - 1)K > 0$ .  
 Тогда при любых начальных условиях  $\mathbf{p}(0)$  и  $\bar{\mathbf{p}}(0)$  справедлива следующая оценка устойчивости среднего:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)| \leq \frac{\varepsilon(b + K)}{\omega(b - (m^N - 1)K)(b - (m^N - 1)K - m^N \varepsilon)}. \quad (2.2.83)$$

**Доказательство.** Будем рассматривать матрицу при  $d_0 = 1$

$$D = \text{diag}(d_0, d_1, \dots) \quad (2.2.84)$$

и соответствующее пространство последовательностей  $l_{1D} = \{\mathbf{z} = (p_0, p_1, p_2, \dots)\}$  таких, что  $\|\mathbf{z}\|_{1k} = \|D_k \mathbf{z}\|_1 < \infty$ . Тогда имеем  $\omega \|\mathbf{z}\|_{1E} = \omega \sum_k k |p_k| \leq \|\mathbf{z}\|_{1D}$ .

Оценивая логарифмическую норму  $\gamma(B(t))_{1D}$ , получаем

$$\begin{aligned} \gamma(B(t))_{1D} &= \gamma(DB(t)D^{-1})_1 \leq \\ \max_i &\left( a_{00}(t) - \xi(t) + \sum_{i \geq 1} \frac{d_i}{d_0} a_{i0}(t), \sup_{i \geq 1} \left( a_{ii}(t) - \xi_i(t) + \frac{d_0}{d_i} (a_{0i}(t) + \xi_i(t) - \xi(t)) + \sum_{j \neq i, j \geq 1} \frac{d_j}{d_i} a_{ji}(t) \right) \right) \leq \\ &-\xi(t) + (m^N - 1) \sup_i |a_{ii}(t)| \leq -b + (m^N - 1)K. \end{aligned} \quad (2.2.85)$$

Далее,

$$\|\hat{B}(t)\|_{1D} = \|D\hat{B}(t)D^{-1}\|_1 \leq m^N \varepsilon. \quad (2.2.86)$$

А тогда

$$\gamma(\bar{B}(t))_{1D} \leq \gamma(DB(t)D^{-1})_1 + \|\hat{B}(t)\|_{1D} \leq -b + (m^N - 1)K + m^N \varepsilon. \quad (2.2.87)$$

Оценим теперь

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}(t)\|_{1D} &\leq \|V(t)\mathbf{p}(0)\|_{1D} + \int_0^t \|V(t, \tau)\mathbf{f}(\tau)\|_{1D} d\tau \leq \\ &e^{-(b-(m^N-1)K)t} \|\mathbf{p}(0)\|_{1D} + \frac{K}{b-(m^N-1)K} \end{aligned} \quad (2.2.88)$$

при любом  $\mathbf{p}(0)$ . Легко видеть, что  $\|\mathbf{f}(\tau)\| \leq \varepsilon$ .

Теперь, с учетом (2.2.82), имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| &\leq \int_0^t e^{-(b-(m^N-1)K-m^N\varepsilon)(t-\tau)} \left( m^N \varepsilon \left( e^{-(b-(m^N-1)K)\tau} \|\mathbf{p}(0)\|_{1D} + \frac{K}{b-(m^N-1)K} \right) + \varepsilon \right) d\tau \leq \\ &\leq o(1) + \frac{\varepsilon(1 + Km^N/(b-(m^N-1)K))}{b-(m^N-1)K-m^N\varepsilon} \end{aligned}$$

А тогда

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{\varepsilon(b+K)}{(b-(m^N-1)K-m^N\varepsilon)(b-(m^N-1)K)} \quad (2.2.89)$$

откуда и получаем требуемую оценку.

**Теорема 16.** Пусть выполнены условия теоремы 14. Пусть существует возрастающая последовательность положительных чисел  $\{d_i\}$  такая, что а)  $\inf_{k \geq 1} (d_j/k) = \omega > 0$ ; б)  $\sup_k (d_{k+1}/d_k) = m < \infty$ ; в)  $\theta - (m^N - 1)K > 0$ . Тогда при любых начальных условиях  $\mathbf{p}(0)$  и  $\bar{\mathbf{p}}(0)$  справедлива следующая оценка устойчивости среднего:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)| \leq \frac{\varepsilon(\theta + K + Km^N(e^\theta - 1))}{\omega(\theta - (m^N - 1)K)(\theta - (m^N - 1)K - m^N\varepsilon)}. \quad (2.2.90)$$

## 2.2.4 Аппроксимация

Рассмотрим семейство «усеченных» процессов  $X_n(t)$ ,  $n \geq S$ , с фазовыми пространствами  $E_n = \{0, 1, \dots, n\}$ , теми же интенсивностями при  $k \leq n$  и матрицами интенсивностей  $A_n(t)$ .

**Теорема 17.** Пусть выполняются условия теоремы 2 и  $\xi_i(t) \leq B$ , тогда

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_n(t)\| \leq \frac{3(K+B)\omega_n^1 K t}{b - (m^N - 1)K}, \quad (2.2.91)$$

$$|E_{\mathbf{p}}(t) - E_{\mathbf{p}_n}(t)| \leq \frac{9(K+B)\omega_n^2 K t}{b - (m^N - 1)K} \quad (2.2.92)$$

при всех  $t \geq 0$ , любом  $n \geq N$  и начальных условиях  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_n(0) = 0$ .

**Доказательство.** Будем отождествлять векторы  $(x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)^T$  и  $(x_1, \dots, x_n)^T$ . Рассмотрим прямую систему Колмогорова для исходного процесса в следующей форме:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A_n(t)\mathbf{p} + (A(t) - A_n(t))\mathbf{p}, \quad (2.2.93)$$

а также соответствующую систему

$$\frac{d\mathbf{p}_n}{dt} = A_n(t)\mathbf{p}_n \quad (2.2.94)$$

для усеченного процесса.

Имеем

$$\mathbf{p}_n(t) = U_n(t)\mathbf{p}(0) \quad (2.2.95)$$

при  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_n(0)$  и

$$\mathbf{p}(t) = U_n(t)\mathbf{p}(0) + \int_0^t U_n(t, \tau) (A(\tau) - A_n(\tau))\mathbf{p}(\tau) d\tau. \quad (2.2.96)$$

Тогда (в любой норме) получаем

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_n(t)\| = \left\| \int_0^t U_n(t, \tau) (A(\tau) - A_n(\tau))\mathbf{p}(\tau) d\tau \right\|. \quad (2.2.97)$$

Рассмотрим матрицу Коши

$$U_n = \begin{pmatrix} u_{00}^n & . & . & u_{0n}^n & 0 & 0 & \dots \\ u_{10}^n & . & . & u_{1n}^n & 0 & 0 & \dots \\ \dots & & & & & & \\ u_{n0}^n & . & . & u_{nn}^n & 0 & 0 & \dots \\ 0 & . & . & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & . & . & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & & & & & & \end{pmatrix}. \quad (2.2.98)$$

Тогда

$$(A - A_n) \mathbf{p} =$$

$$= (0, \dots, (p_{n-2} + p_{n-1} + p_n) \lambda(t) + (p_{n+2} + p_{n+3}) \mu(t) - (\xi_{n+1} + 2\mu(t) + 3\lambda(t)) p_{n+1}, \dots)$$

и, следовательно,

$$U_n (A - A_n) \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (p_{n-2} + p_{n-1} + p_n) \lambda(t) + (p_{n+2} + p_{n+3}) \mu(t) - (\xi_{n+1} + 2\mu(t) + 3\lambda(t)) p_{n+1} \\ (p_{n-1} + p_n + p_{n+1}) \lambda(t) + (p_{n+3} + p_{n+4}) \mu(t) - (\xi_{n+2} + 2\mu(t) + 3\lambda(t)) p_{n+2} \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (2.2.99)$$

$$\begin{aligned} \|U_n (A - A_n) \mathbf{p}\| &= \\ \sum_{k \geq 0} |(p_{n+k} + p_{n+k-1} + p_{n+k-2}) \lambda(t) + (p_{n+k+2} + p_{n+k+3}) \mu(t) - (\xi_{n+k+1} + 2\mu(t) + 3\lambda(t)) p_{n+k+1}| &\leq \\ &\leq 3\lambda(t) \sum_{k \geq -2} p_{n+k} + 2\mu(t) \sum_{k \geq 1} p_{n+k} + (K + B) \sum_{k \geq 1} p_{n+k} \leq \\ &\leq 3(K + B) \sum_{k \geq -4} p_{n+k} \leq 3(K + B) \omega_n^1 \sum_{k \geq -4} d_{n+k} p_{n+k} \leq 3(K + B) \omega_n^1 \|p(t)\|_{1D}, \end{aligned}$$

где  $\omega_n^1 = \sup_{k \geq n-4} \frac{1}{d_k}$ , и

$$\begin{aligned} & \|U_n(A - A_n)\mathbf{p}\|_{1E} = \\ & \sum_{k \geq 0} |(p_{n+k} + p_{n+k-1} + p_{n+k-2})\lambda(t) + (p_{n+k+2} + p_{n+k+3})\mu(t) - (\xi_{n+k+1} + 2\mu(t) + 3\lambda(t))p_{n+k+1}| \\ & \times (n+k+1) \leq (K+B) \sum_{k \geq n-4} (6k+3)p_k \leq 9(K+B)\omega_n^2 \sum_{k \geq -4} d_{n+k}p_{n+k} 9(K+B)\omega_n^2 \|p(t)\|_{1D}, \end{aligned}$$

где  $\omega_n^2 = \sup_{k \geq n-4} \frac{k}{d_k}$ .

### 2.2.5 Пример

**Пример 3.** Рассмотрим здесь простейшую систему обслуживания с групповым поступлением и обслуживанием требований с катастрофами. Будем предполагать, что требования поступают группами не более трех одновременно с одинаковыми интенсивностями  $a_{i+k,i}(t) = \lambda(t) = 2 + \sin 2\pi t$ ,  $1 \leq k \leq 3$ , одновременно обслуживается одно или два требования также с одинаковыми интенсивностями  $a_{i-k,i}(t) = \mu(t) = 1 + \cos 2\pi t$ ,  $1 \leq k \leq 2$ , а интенсивность катастрофы при наличии  $k$  требований в системе есть  $\xi_k(t) = 5 + \sin 2\pi kt + \cos 2\pi t$ ,  $k \geq 1$ .

Тогда  $\xi(t) = 4 + \cos 2\pi t$ ,  $b = 3$ ,  $\theta = 4$ ,  $K = 13$ . Положим  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Тогда получаем следующие оценки устойчивости: по первой теореме

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq 0.333 \cdot 10^{-3}, \quad (2.2.100)$$

по второй теореме

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq 1.25 \cdot 10^{-3}. \quad (2.2.101)$$

Далее, для получения оценок устойчивости среднего положим  $d_i = 1.1^i$ , имеем тогда  $B = \sup_{i,t} \xi_i(t) = 7$ ,  $\omega = 0.259$ ,  $m = 1.1$ . Применяя подход теоремы с учетом структуры инфинитизимальной матрицы процесса, получаем следующие оценки:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)\| \leq 0.053, \quad (2.2.102)$$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)\| \leq 4.32. \quad (2.2.103)$$

С учетом оценок скорости сходимости получаем, что для построения с точностью  $\varepsilon$  предельных характеристик исходного процесса достаточно брать  $t \geq 9$ ; а используя аппроксимацию, находим, что для достижения нужной точности усечения при  $t \leq 10$  достаточно выбрать  $n = 285$ .

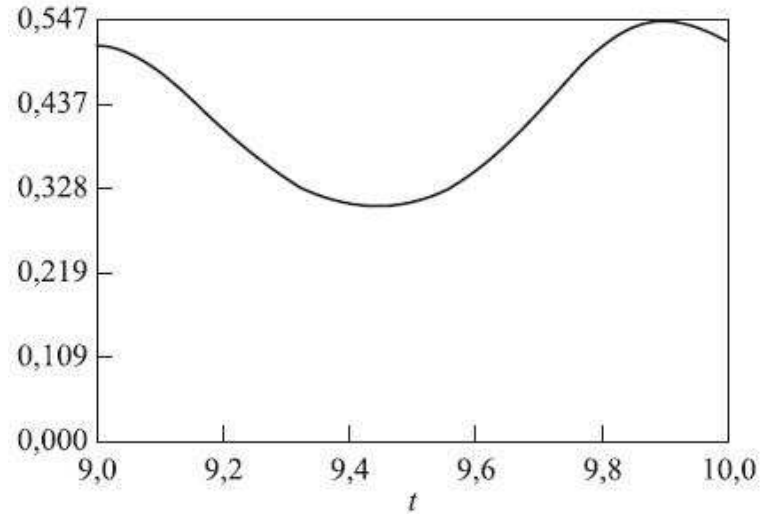


Рис. 2.5: Приближенное значение предельной величины  $J_0(t) = \Pr(X(t) = 0)$  (пример 3)

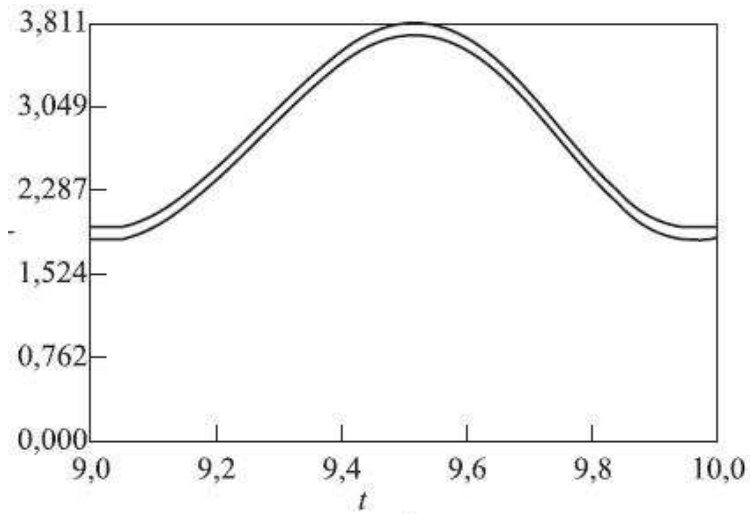


Рис. 2.6: Приближенное значение предельного среднего для возмущенного процесса (пример 3)

## 2.3 Система обслуживания $M_t/M_t/S$ с катастрофами

### 2.3.1 Введение

В настоящей главе изучается модель системы обслуживания  $M(t)/M(t)/S$  с катастрофами в случае, когда интенсивности катастроф зависят от числа требований в системе обслуживания. При этом удастся получить достаточно общие условия, гарантирующие наличие слабой эргодичности для процесса, описывающего число требований в такой системе обслуживания, и получить оценки скорости сходимости, гарантирующие возможность приближенного построения предельных характеристик системы.

Обозначим через  $X = X(t)$ ,  $t \geq 0$ , число требований в момент  $t$  для описываемой модели. Тогда  $X = X(t)$  является процессом рождения и гибели с катастрофами. Интенсивности рождения, гибели и катастрофы для процесса в случае, если  $X(t) = n$ , есть  $\lambda_n(t) = \lambda(t)$ ,  $\mu_n(t) = \min(n, S)\mu(t)$  и  $\xi_n(t) = \zeta_n\xi(t)$  соответственно.

Обозначим через  $p_{ij}(s, t) = Pr \{X(t) = j | X(s) = i\}$  вероятности перехода, а через  $p_i(t) = Pr \{X(t) = i\}$  – вероятности состояний для процесса  $X = X(t)$ .

Тогда для описания процесса получаем прямую систему Колмогорова

$$\begin{cases} \frac{dp_0}{dt} = -\lambda_0(t)p_0 + \mu_1(t)p_1 + \sum_{k \geq 1} \xi_k(t)p_k, \\ \frac{dp_k}{dt} = \lambda_{k-1}(t)p_{k-1} - (\lambda_k(t) + \mu_k(t) + \xi_k(t))p_k + \mu_{k+1}(t)p_{k+1}, k \geq 1. \end{cases} \quad (2.3.104)$$

Пусть  $\mathbf{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots)^T$ ,  $t > 0$ , – вектор-столбец вероятностей состояний процесса, а  $A(t) = \{a_{ij}(t), t \geq 0\}$  – матрица системы (2.3.104).

Далее будет предполагаться, что интенсивности поступления и обслуживания требований  $\lambda(t)$  и  $\mu(t)$  локально интегрируемы на  $[0; \infty)$ . Будем считать «базисную» интенсивность катастрофы  $\xi(t)$  локально интегрируемой на

$[0; \infty)$ , а коэффициенты состояний – ограниченными, то есть  $0 \leq \zeta_n \leq M$  при некотором  $M < \infty$ . Тогда систему (2.3.104) можно рассматривать как дифференциальное уравнение

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A(t) \mathbf{p}, \quad t \geq 0, \quad (2.3.105)$$

в пространстве последовательностей  $l_1$  с ограниченной почти при всех  $t \geq 0$  локально интегрируемой оператор-функцией  $A(t)$ . Следовательно, можно применять общий подход, предложенный впервые в заметке [8] и развитый затем в [51, 11]. Метод опирается на две основные составляющие: понятие и оценки, связанные с логарифмической нормой операторной функции, и специальные преобразования редуцированной матрицы интенсивностей рассматриваемой марковской цепи, и позволяет получать явные и точные оценки.

### 2.3.2 Слабая эргодичность

В настоящем пункте будет изучаться слабая эргодичность и сопутствующие свойства числа требований в рассматриваемой системе обслуживания для следующих важных ситуаций:

- интенсивности катастроф существенны при любой длине очереди;
- интенсивность обслуживания требований достаточно велика;
- достаточно велика интенсивность поступления требований, а интенсивности катастроф существенны для ситуаций, когда длина очереди (количество требований в системе) пропорционально некоторому натуральному числу.

**Теорема 18.** Пусть

$$\inf_n \zeta_n = \zeta > 0 \quad (2.3.106)$$

и, кроме того, найдется  $\varepsilon > 0$  такое, что

$$\int_0^\infty (\zeta \xi(t) - \varepsilon \lambda(t)) dt = +\infty. \quad (2.3.107)$$

Тогда процесс  $X(t)$  слабо эргодичен и имеет предельное среднее. Если при этом в качестве предельного режима и предельного среднего выбрать режим  $\pi(t)$  и среднее  $\phi(t)$ , соответствующие начальному условию  $X(0) = 0$ , то при любом начальном условии вида  $X(0) = k$  справедливы следующие оценки:

$$\|\mathbf{p}(t) - \pi(t)\| \leq 4(1 + \varepsilon)^k \varepsilon^{-1} e^{-\int_0^t (\zeta\xi(\tau) - \varepsilon\lambda(\tau)) d\tau} \quad (2.3.108)$$

и

$$|E_k(t) - E_0(t)| \leq \frac{4(1 + \varepsilon)^k}{\varepsilon\omega} e^{-\int_0^t (\zeta\xi(\tau) - \varepsilon\lambda(\tau)) d\tau}. \quad (2.3.109)$$

**Доказательство.** Полагая  $p_0(t) = 1 - \sum_{i \geq 1} p_i(t)$ , получаем аналогично тому, как это проделано в [13], следующую систему:

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = B(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}(t), \quad (2.3.110)$$

в которой

$$B(t) = \begin{pmatrix} -(\lambda_0 + \lambda_1 + \mu_1 + \xi_1) & (\mu_2 - \lambda_0) & -\lambda_0 & -\lambda_0 & \cdots & \cdots \\ \lambda_1 & -(\lambda_2 + \mu_2 + \xi_2) & \mu_3 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & -(\lambda_3 + \mu_3 + \xi_3) & \mu_4 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{z}(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots)^T, \quad \mathbf{f}(t) = (\lambda_0(t), 0, 0, \dots)^T.$$

Обозначим оператор Коши линейной неоднородной системы (2.3.110) через  $V(t, z)$ , введем в рассмотрение матрицу

$$D = \begin{pmatrix} d_0 & d_0 & d_0 & \cdots \\ 0 & d_1 & d_1 & \cdots \\ 0 & 0 & d_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.3.111)$$

и пространство последовательностей  $\ell_{1D} = \{\mathbf{z} = (p_1, p_2, \dots)\}$  таких, что  $\|\mathbf{z}\|_{1D} = \|D\mathbf{z}\|_1 < \infty$ , где  $d_i$  — пока не выбранные положительные числа.

Положим

$$\alpha_k(t) = \lambda_k(t) + \mu_{k+1}(t) + \xi_{k+1}(t) - \frac{d_{k+1}}{d_k} \lambda_{k+1}(t) - \frac{d_{k-1}}{d_k} \mu_k(t), \quad k \geq 0, \quad (2.3.112)$$

и

$$\alpha(t) = \inf_{k \geq 0} \alpha_k(t). \quad (2.3.113)$$

Тогда получаем

$$\gamma(B(t))_{1D} = \sup_{i \geq 0} \left( \frac{d_{i+1}}{d_i} \lambda_{i+1}(t) - (\lambda_i(t) + \mu_{i+1}(t) + \xi_{i+1}(t)) + \frac{d_{i-1}}{d_i} \mu_i(t) \right) = -\alpha(t). \quad (2.3.114)$$

Полагая теперь  $d_{-1} = d_0 = 1$ ,  $d_{k+1} = (1 + \varepsilon)d_k$ ,  $k \geq 0$ , получаем с учетом (2.3.114) следующую оценку:

$$\begin{aligned} \gamma(B(t))_{1D} &\leq - \left( \zeta \xi(t) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} (S\mu(t) - (1 + \varepsilon)\lambda(t)) \right) \\ &\leq - (\zeta \xi(t) - \varepsilon \lambda(t)) = -\alpha_*(t), \end{aligned} \quad (2.3.115)$$

причем из (2.3.106) вытекает, что  $\int_0^\infty \alpha_*(t) dt = +\infty$ . Теперь с учетом проведенного ранее (см., например, [51]) сравнения норм получаем слабую эргодичность процесса и оценку

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq 4e^{-\int_0^t (\zeta \xi(\tau) - \varepsilon \lambda(\tau)) d\tau} \|\mathbf{p}^*(0) - \mathbf{p}^{**}(0)\|_{1D}. \quad (2.3.116)$$

Выбирая теперь  $\mathbf{p}^*(0) = \pi(0) = \mathbf{e}_0$ ,  $\mathbf{p}^{**}(0) = \mathbf{p}(0) = \mathbf{e}_k$ , получаем неравенство (2.3.108).

Рассматривая величину  $\omega = \inf_{k \geq 1} \frac{d_k}{k}$  и убеждаясь, что  $\omega = \inf_{k \geq 1} \frac{(1+\varepsilon)^k}{k} > 0$ , получаем снова из сравнения норм существование предельного среднего и оценку

$$|E_{\mathbf{p}^*}(t) - E_{\mathbf{p}^{**}}(t)| \leq \frac{4}{\omega} e^{-\int_0^t (\zeta \xi(\tau) - \varepsilon \lambda(\tau)) d\tau} \|\mathbf{p}^*(0) - \mathbf{p}^{**}(0)\|_{1D}. \quad (2.3.117)$$

Для завершения доказательства достаточно выбрать снова  $\mathbf{p}^*(0) = \pi(0) = \mathbf{e}_0$ ,  $\mathbf{p}^{**}(0) = \mathbf{p}(0) = \mathbf{e}_k$ .

**Замечание 4.** Пусть все интенсивности (поступления, обслуживания требований, катастроф) 1-периодичны. Тогда:

1) вместо условия (2.3.107) достаточно потребовать, чтобы  $\int_0^1 \xi(t) dt > 0$ ;

2) можно выбрать «особые» предельные характеристики, а именно существует 1-периодический предельный режим  $\pi(t)$  и соответствующее ему 1-периодическое предельное среднее  $\phi(t)$ ;

3) эти предельные характеристики можно приближенно построить, пользуясь методикой, разработанной в [56, 13], с использованием усеченного процесса и оценок скорости сходимости.

**Теорема 19.** Пусть при некотором  $\varepsilon > 0$  выполняется условие

$$\int_0^\infty (S\mu(t) - (1 + \varepsilon) \lambda(t)) dt = +\infty. \quad (2.3.118)$$

Тогда процесс  $X(t)$  слабо эргодичен и имеет предельное среднее. Если при этом в качестве предельного режима и предельного среднего выбрать режим  $\pi(t)$  и среднее  $\phi(t)$ , соответствующие начальному условию  $X(0) = 0$ , то при любом начальном условии вида  $X(0) = k$  справедливы следующие оценки:

$$\|\mathbf{p}(t) - \pi(t)\| \leq 4(1 + \varepsilon)^k \varepsilon^{-1} e^{-\int_0^t \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} (S\mu(\tau) - (1+\varepsilon)\lambda(\tau)) d\tau} \quad (2.3.119)$$

и

$$|E_k(t) - E_0(t)| \leq \frac{4(1 + \varepsilon)^k}{\varepsilon \omega} e^{-\int_0^t \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} (S\mu(\tau) - (1+\varepsilon)\lambda(\tau)) d\tau}. \quad (2.3.120)$$

**Доказательство** проводится так же, как в предыдущей теореме. При этом, строя то же вспомогательное пространство  $\ell_{1D}$ , вместо (2.3.116) получаем неравенство

$$\begin{aligned} \gamma(B(t))_{1D} &\leq - \left( \zeta \xi(t) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} (S\mu(t) - (1+\varepsilon)\lambda(t)) \right) \\ &\leq - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} (S\mu(t) - (1+\varepsilon)\lambda(t)) = -\alpha_*(t), \end{aligned} \quad (2.3.121)$$

и далее оценки получаются тем же образом.

**Замечание 5.** Если все интенсивности (поступления, обслуживания требований, катастроф) 1-периодичны, то:

1) вместо условия (2.3.118) достаточно потребовать, чтобы

$$\int_0^1 (S\mu(t) - \lambda(t)) dt > 0;$$

2) можно выбрать «особые» предельные характеристики, а именно существует 1-периодический предельный режим  $\pi(t)$  и соответствующее ему 1-периодическое предельное среднее  $\phi(t)$ ;

3) эти предельные характеристики можно приближенно построить, пользуясь методикой, разработанной в [51, 13], с использованием усеченного процесса и оценок скорости сходимости.

Рассмотрим, наконец, ситуацию, когда условия предыдущих теорем не выполняются.

**Теорема 20.** Пусть при некотором натуральном  $R$  выполняется условие

$$\inf_n \zeta_{nR} = \zeta > 0 \quad (2.3.122)$$

вместо (2.3.106). Пусть, кроме того, найдется  $\delta > 0$  такое, что

$$\int_0^\infty g(t) dt = +\infty, \quad (2.3.123)$$

где

$$g(t) = \min (\zeta \xi(t) - \delta \lambda(t) - \delta S\mu(t), \lambda(t) - (1 + \delta) S\mu(t)). \quad (2.3.124)$$

Тогда процесс  $X(t)$  слабо эргодичен и имеет предельное среднее.

**Доказательство** проводится по той же схеме, что и в теореме 1. При этом вспомогательная последовательность  $\{d_k\}$  выбирается следующим образом:  $d_{-1} = d_0 = 1$ ,  $d_{k+1} = (1 + \varepsilon)^{-1}d_k$ , если  $k \neq iR - 1$ ,  $d_{k+1} = (1 + \varepsilon)^R d_k$  при  $k = iR - 1$ , где положительное число  $\varepsilon < \delta$  таково, что  $(1 + \varepsilon)^R - 1 < \delta$ . Тогда получаем

$$\alpha_k(t) \geq \lambda(t) + S\mu(t) + \zeta_{k+1}\xi(t) - S\mu(t)(1 + \varepsilon) - (1 + \varepsilon)^{-1}\lambda(t) \geq \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}(\lambda(t) - (1 + \varepsilon)S\mu(t)) \quad (2.3.125)$$

при  $k \neq iR - 1$  и

$$\alpha_k(t) \geq \zeta \xi(t) - \varepsilon S\mu(t) - ((1 + \varepsilon)^R - 1)\lambda(t) \quad (2.3.126)$$

при  $k = iR - 1$ .

Отсюда вытекает, что

$$\gamma(B(t))_{1D} \leq -g(t), \quad (2.3.127)$$

причем последовательность  $\{d_k\}$  построена так, что выполняется и условие  $\omega = \inf_{k \geq 1} \frac{d_k}{k} > 0$ . Отсюда и следует утверждение теоремы.

**Следствие 5.** Если при выполнении условий теоремы 3 в качестве предельного режима и предельного среднего выбрать режим  $\pi(t)$  и среднее  $\phi(t)$ , соответствующие начальному условию  $X(0) = 0$ , то при любом начальном условии вида  $X(0) = k$  справедливы следующие оценки:

$$\|\mathbf{p}(t) - \pi(t)\| \leq \frac{4r_k}{d} e^{-\int_0^t G(\tau) d\tau} \quad (2.3.128)$$

и

$$|E_k(t) - E_0(t)| \leq \frac{4r_k}{d\omega} e^{-\int_0^t G(\tau) d\tau}, \quad (2.3.129)$$

где  $d = \min d_k$ ,  $r_k = \sum_{i \leq k-1} d_i$ , а

$$G(t) = \min \left( \zeta \xi(t) - \varepsilon S\mu(t) - ((1 + \varepsilon)^R - 1)\lambda(t), \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}(\lambda(t) - (1 + \varepsilon)S\mu(t)) \right) \geq g(t).$$

**Замечание 6.** В случае 1-периодических интенсивностей за счет более сложного выбора вспомогательной последовательности  $\{d_k\}$  условия теоремы можно существенно ослабить.

### 2.3.3 Примеры

Рассмотрим систему обслуживания  $M(t)/M(t)/100$  с катастрофами в случае периодических интенсивностей в разных ситуациях, гарантирующих слабую эргодичность модели. Вычислим предельное среднее  $\phi(t)$ , а также асимптотику величины  $J_0(t)$  - вероятности того, что в момент  $t$  очередь пуста, то есть в системе обслуживания нет ни одного требования, и величины  $J_{10}(t) = \Pr(X(t) \leq 10)$ .

При вычислениях используется следствие 4 из работы [13], которое с учетом конкретной модели и зависимости интенсивностей катастроф от состояния выглядит следующим образом:

**Следствие 6.** Пусть выполнены условия теоремы 1,  $X_n(t)$  - соответствующий усеченный процесс, а  $X(0) = X_n(0) = 0$ . Тогда при всех  $t \geq 0$  и любом  $n$  справедливы оценки

$$\|\pi(t) - \mathbf{p}_n(t)\|_1 \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\pi(t)\|_{1D} \left( 4(1 + \varepsilon)^k \varepsilon^{-1} e^{-\int_0^t (\zeta \xi(\tau) - \varepsilon \lambda(\tau)) d\tau} + 6Lw_n^1 t \right) \quad (2.3.130)$$

и

$$|\phi(t) - E_{0,n}(t)| \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\pi(t)\|_{1D} \left( \frac{4(1 + \varepsilon)^k}{\omega \varepsilon} e^{-\int_0^t (\zeta \xi(\tau) - \varepsilon \lambda(\tau)) d\tau} + 6Lw_n^2 t \right), \quad (2.3.131)$$

где  $L = \sup_{[0,1]} (\lambda(t) + S\mu(t) + M\xi(t))$ ,  $w_n^1 = \sup_{k \geq n} \frac{1}{d_k}$ ,  $w_n^2 = \sup_{k \geq n} \frac{k}{d_k}$  и  $E_{0,n} = E_k(t) = E\{X_n(t) | X_n(0) = 0\}$ , а  $\pi(t)$  - существующий 1-периодический предельный режим.

**Замечание 7.** Аналогичные оценки (с изменением первого слагаемого в скобках) получаются при выполнении условий теорем.

**Пример 4.**  $\lambda(t) = 240 + \cos 2\pi t$ ,  $\mu(t) = 1 + \sin 4\pi t$ ,  $\xi_n(t) = 100 + \sin 4\pi t$ ,  $n \geq 1$ .

Тогда при  $\varepsilon = 0.4$  выполнены условия теоремы и для построения предельных 1-периодических характеристик (с точностью до  $10^{-5}$ ) достаточно выбрать размерность усеченного процесса  $n = 100$  и построить нужные характеристики для усеченного процесса с нулевым начальным условием на отрезке  $[8, 9]$ . Соответствующие графики приведены на рисунках.

**Пример 5.**  $\lambda(t) = 240 + \cos 2\pi t$ ,  $\mu(t) = 10 + \sin 4\pi t$ ,  $\xi_n(t) = \frac{2 + \sin 4\pi t}{n}$ .

Получаем выполнение условий теоремы при  $\varepsilon = 3.0$ , при этом  $n = 65$ , а в качестве необходимого отрезка будет  $[1.5, 2.5]$ , см. рисунки.

**Пример 6.**  $\lambda(t) = 240 + \cos 2\pi t$ ,  $\mu(t) = 1 + \sin 4\pi t$ ,  

$$\xi_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq 3k, \\ 153 + \sin 4\pi t, & \text{если } n = 3k \end{cases}$$

Выполнены условия последней теоремы, при этом  $\varepsilon = 0.15$ ,  $n = 250$ ,  $t \in [19, 20]$ .

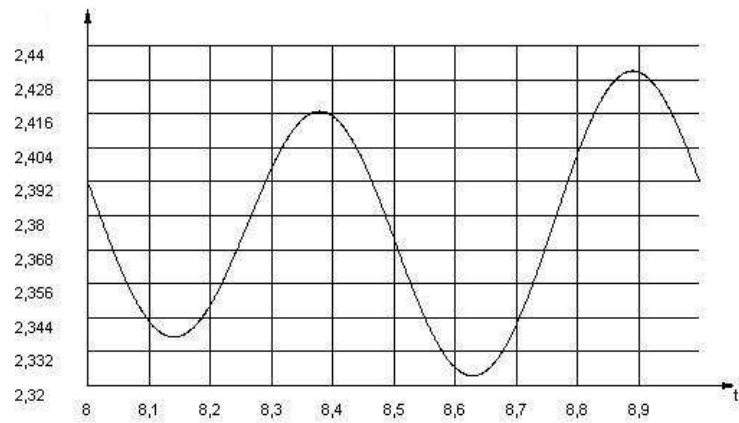


Рис. 2.7: Приближенное значение предельного среднего (пример 4)

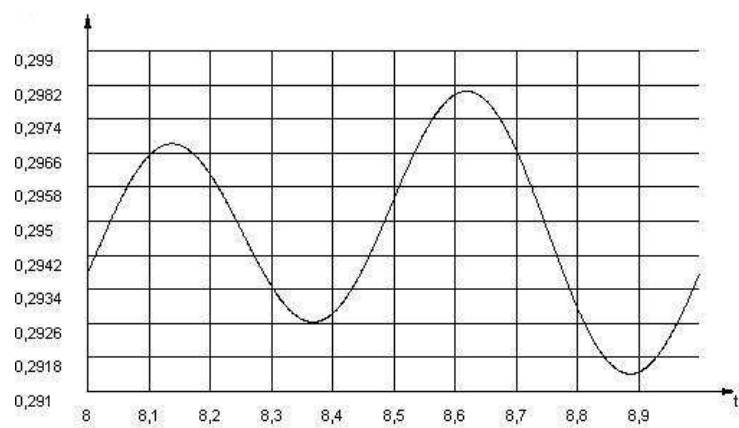


Рис. 2.8: Приближенное значение предельной величины  $J_0(t) = \Pr(X(t) = 0)$  (пример 4)

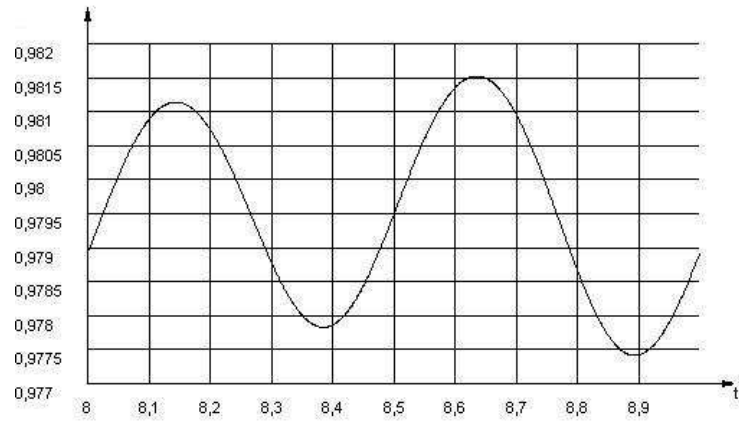


Рис. 2.9: Приближенное значение предельной величины  $J_{10}(t) = \Pr(X(t) \leq 10)$  (пример 4)

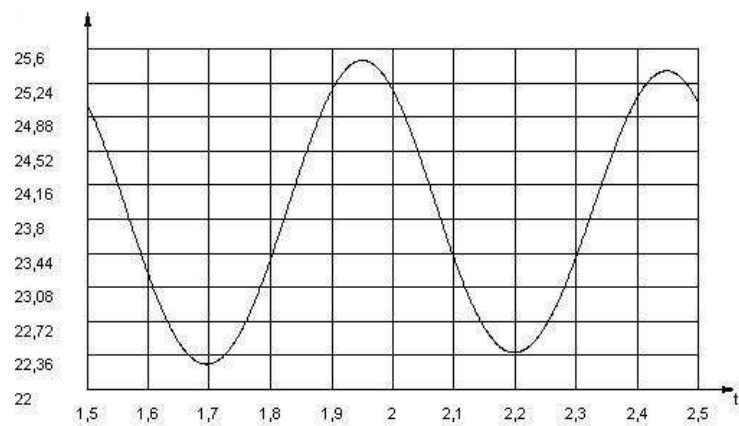


Рис. 2.10: Приближенное значение предельного среднего (пример 5)

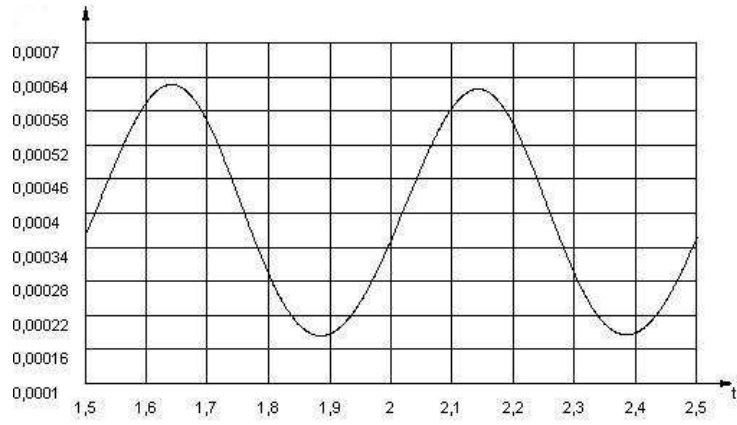


Рис. 2.11: Приближенное значение предельной величины  $J_0(t) = \Pr(X(t) = 0)$  (пример 5)

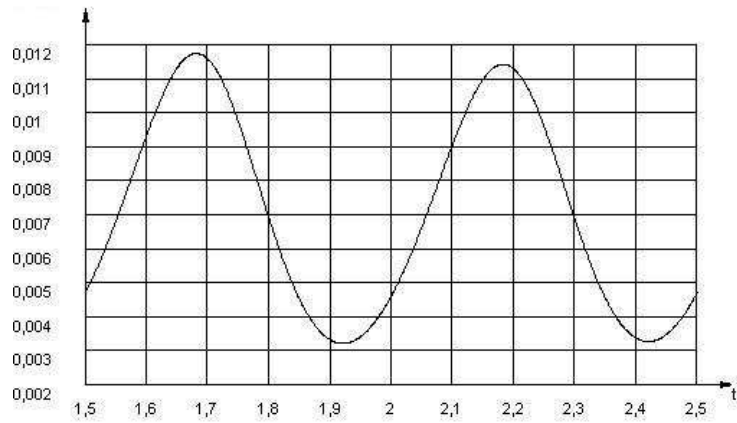


Рис. 2.12: Приближенное значение предельной величины  $J_{10}(t) = \Pr(X(t) \leq 10)$  (пример 5)

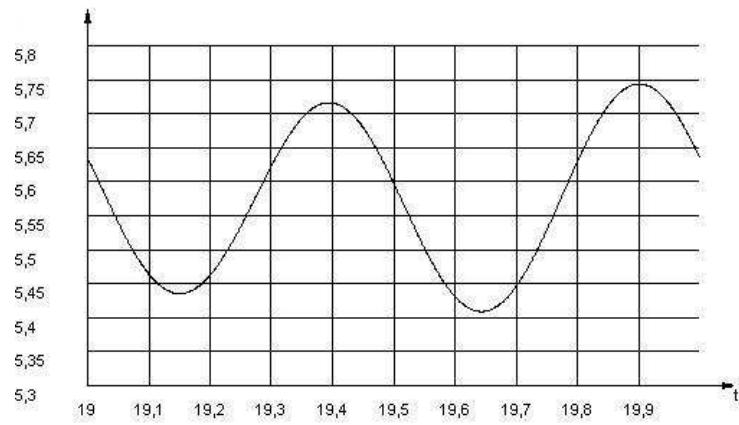


Рис. 2.13: Приближенное значение предельного среднего (пример 6)

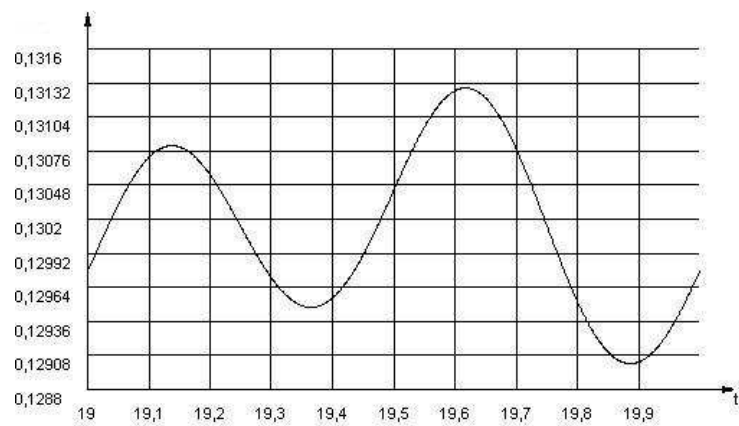


Рис. 2.14: Приближенное значение предельной величины  $J_0(t) = \Pr(X(t) = 0)$  (пример 6)

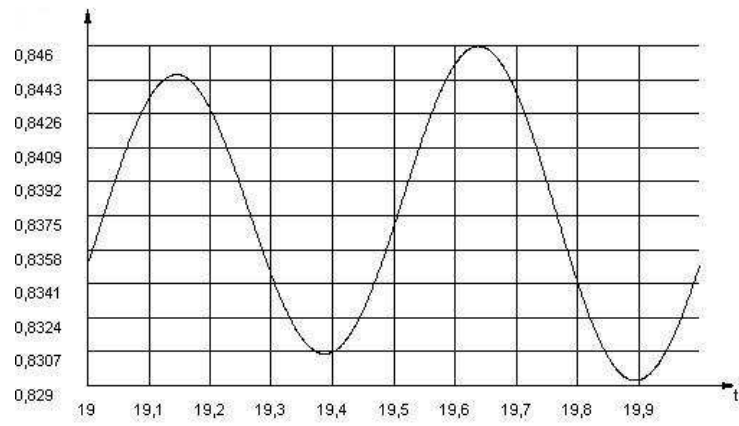


Рис. 2.15: Приближенное значение предельной величины  $J_{10}(t) = \Pr(X(t) \leq 10)$  (пример 6)

### 2.3.4 Устойчивость

Рассмотрим теперь «возмущенный» ПРГ с катастрофами  $\bar{X} = \bar{X}(t)$ ,  $t \geq 0$ , обозначая все его характеристики так же, как и у невозмущенного процесса, с дополнительной чертой. Положим  $\hat{\mathbf{A}}(t) = \mathbf{A}(t) - \bar{\mathbf{A}}(t)$  и для простоты записи оценок будем предполагать, что возмущения «равномерно малы», то есть почти при всех  $t \geq 0$  выполняется неравенство

$$\|\hat{\mathbf{A}}(t)\| \leq \varepsilon. \quad (2.3.132)$$

#### Случай больших катастроф

**А.** Пусть существуют  $Q > 0$  и  $\beta > 0$  такие, что

$$e^{-\int_s^t \xi(u) du} \leq Q e^{-\beta(t-s)}, \quad (2.3.133)$$

для любых  $s, t, 0 \leq s \leq t$ .

Легко видеть, что  $Q \geq 1$  (например, полагая  $s = t$ ).

**Теорема 21.** Пусть выполнено условие **А**. Тогда

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{(\ln Q + 1 - Q e^{-\beta t})\varepsilon}{\beta} + Q e^{-\beta t} \|\mathbf{p}(0) - \bar{\mathbf{p}}(0)\| \quad (2.3.134)$$

для любых начальных условий  $\mathbf{p}(0)$ ,  $\bar{\mathbf{p}}(0)$  и всех  $t \geq \frac{\ln s}{\beta}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим прямую систему Колмогорова для вероятностей состояний

$$\begin{cases} \frac{dp_0}{dt} = -(\lambda(t) + \xi(t)) p_0 + \mu(t) p_1 + \xi(t), \\ \frac{dp_k}{dt} = \lambda(t) p_{k-1} - (\lambda(t) + \xi(t) + k\mu(t)) p_k + (k+1)\mu(t) p_{k+1}, 1 \leq k \leq S-1, \\ \frac{dp_k}{dt} = \lambda(t) p_{k-1} - (\lambda(t) + \xi(t) + S\mu(t)) p_k + S\mu(t) p_{k+1}, k \geq S \end{cases} \quad (2.3.135)$$

В виде дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{A}(t) \mathbf{p} + \mathbf{g}(t), \quad t \geq 0, \quad (2.3.136)$$

в пространстве последовательностей  $l_1$ , где  $\mathbf{g}(t) = (\xi(t), 0, 0, \dots)^T$ ,  $\mathbf{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots)^T$  - вектор-столбец вероятностей состояний, а  $\mathbf{A}(t) = \{a_{ij}(t), t \geq 0\}$  - матрица, порождаемая системой (3.1.1), при этом элементы матрицы  $\mathbf{A}(t)$  определяются по формулам

$$a_{ij}(t) = \begin{cases} \lambda_{i-1}(t), & \text{если } j = i - 1, \\ \mu_{i+1}(t), & \text{если } j = i + 1, \\ -(\lambda_i(t) + \mu_i(t) + \xi(t)), & \text{если } j = i, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.3.137)$$

Далее, оценивая логарифмическую норму оператора  $\mathbf{A}(t)$  в пространстве  $l_1$  (см. [13]), получаем

$$\gamma(\mathbf{A}(t))_1 = \sup_i \left( a_{ii}(t) + \sum_{j \neq i} |a_{ji}(t)| \right) = -\xi(t) \quad (2.3.138)$$

(см. [13]). Тогда при условии  $\mathbf{A}$

$$\|U(t, s)\| \leq e^{-\int_s^t \xi(\tau) d\tau} \leq Qe^{-\beta(t-s)} \quad (2.3.139)$$

для всех  $0 \leq s \leq t$ , где  $U(t, s)$  - оператор Коши уравнения (3.2.6).

Отсюда получаем

$$\|\mathbf{p}^1(t) - \mathbf{p}^2(t)\| \leq 2Qe^{-\beta(t-s)} \quad (2.3.140)$$

для любых начальных условий  $\mathbf{p}^1(0)$ ,  $\bar{\mathbf{p}}^2(0)$  и всех  $0 \leq s \leq t$ .

Применим далее результаты теоремы 8. Имеем

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \begin{cases} \|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\| + (t-s)\varepsilon, & 0 < t-s < b^{-1} \ln Q, \\ \beta^{-1}(\ln Q + 1 - Qe^{-\beta(t-s)})\varepsilon + Qe^{-\beta(t-s)}\|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\|, & t-s \geq b^{-1} \ln Q \end{cases} \quad (2.3.141)$$

для любых начальных условий  $\mathbf{p}(s)$  и  $\bar{\mathbf{p}}(s)$ . Положив  $s = 0$ , получаем нужное утверждение.

**Следствие 7.** Пусть выполнены условия теоремы 21. Тогда для любых начальных условий  $\mathbf{p}(s)$  и  $\bar{\mathbf{p}}(s)$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{\varepsilon(1 + \ln Q)}{\beta}. \quad (2.3.142)$$

**Следствие 8.** Пусть интенсивности рождения, гибели и катастроф 1-периодичны. Пусть  $\int_0^1 \xi(t)dt \geq \theta^* > 0$  вместо **A**. Тогда оценки (2.3.134) и (2.3.142) выполняются при  $Q = e^K$ ,  $\beta = \theta^*$ , где

$$K = \sup_{|t-s| \leq 1} \int_s^t \xi(\tau) d\tau < \infty.$$

**Доказательство.** Имеем

$$e^{-\int_s^t \xi(u)du} \leq e^K e^{-\theta^*(t-s)}. \quad (2.3.143)$$

### Случай больших интенсивностей гибели

Пусть теперь интенсивности катастроф не являются существенными и вместо **A** выполняется

**B.** Пусть существуют  $\delta \in (1, \frac{S}{S-1}]$ , функция  $\theta(t)$  и положительные числа  $R$  и  $\nu$  такие, что

$$S\mu(t) - \delta\lambda(t) \geq \theta(t); \quad e^{-\int_s^t (1-\delta^{-1})\theta(u)du} \leq Re^{-\nu(t-s)},$$

для любых  $s, t, 0 \leq s \leq t$ .

**Теорема 22.** Пусть выполняется условие **B** и  $\lambda(t) \leq M$ . Тогда для любых начальных условий  $\mathbf{p}(0)$  и  $\bar{\mathbf{p}}(0)$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq R\varepsilon \frac{4MR(1 + \delta) + 2\nu}{\nu(\nu - (1 + \delta)\varepsilon)}. \quad (2.3.144)$$

**Доказательство.** Поскольку  $\mathbf{p}(t) \in \Omega$  при всех  $t \geq s$ , можно положить  $p_0(t) = 1 - \sum_{i \geq 1} p_i(t)$ , и получим систему

$$\begin{pmatrix} \frac{dp_1}{dt} \\ \frac{dp_2}{dt} \\ \frac{dp_3}{dt} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(2\lambda + \mu + \xi) & (2\mu - \lambda) & -\lambda & -\lambda & \cdots & \cdots \\ \lambda & -(\lambda + 2\mu + \xi) & 3\mu & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda & -(\lambda + 3\mu + \xi) & 4\mu & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (2.3.145)$$

или, в векторном виде,

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = B(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}(t). \quad (2.3.146)$$

Решение этого неоднородного уравнения можно записать в виде

$$\mathbf{z}(t) = V(t, 0)\mathbf{z}(0) + \int_0^t V(t, \tau)\mathbf{f}(\tau) d\tau, \quad (2.3.147)$$

где  $V(t, \tau)$  – оператор Коши уравнения (3.2.9).

Рассмотрим треугольную матрицу

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & d_1 & d_1 & \cdots & d_1 \\ 0 & d_2 & d_2 & \cdots & d_2 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & d_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \quad (2.3.148)$$

и норму  $\|x\|_{1D} = \|Dx\|$ , причем  $\|B\|_{1D} = \|DBD^{-1}\|$  и  $d_k = \delta^k$ .

Пусть

$$\alpha_k(t) = \lambda(t) + \min(k+1, S)\mu(t) + \xi(t) - \delta\lambda(t) - \frac{1}{\delta} \min(k, S)\mu(t), \quad k \geq 0.$$

Тогда

$$\alpha_k(t) \geq \alpha_0(t) \geq \lambda(t) + \mu(t) - \delta\lambda(t)$$

для  $k < S$ , и

$$\alpha_k(t) \geq (S\mu(t) - \delta\lambda(t))(1 - \delta^{-1})$$

для  $k \geq S$ .

Пусть  $\alpha(t) = \inf_{k \geq 0} \alpha_k(t)$ . Тогда учитывая  $\delta \leq \frac{S}{S-1}$ , получаем

$$\alpha(t) \geq \alpha_S(t) \geq (S\mu(t) - \delta\lambda(t))(1 - \delta^{-1}) \geq (1 - \delta^{-1})\theta(t).$$

Значит,

$$\begin{aligned} \gamma(B(t))_{1D} &= \gamma\left(DB(t)D^{-1}\right)_1 = \sup_{i \geq 0} (-\lambda(t) + \min(k+1, S)\mu(t) + \xi(t)) + \delta\lambda(t) + \frac{1}{\delta} \min(k, S)\mu(t) = \\ &= -\alpha(t) \leq -(1 - \delta^{-1})\theta(t). \end{aligned}$$

Поэтому получаем следующее при  $0 \leq s \leq t$

$$\|V(t, s)\|_{1D} = \|DV(t, s)D^{-1}\| \leq e^{-\int_s^t (1-\delta^{-1})\theta(\tau)d\tau} \leq Re^{-\nu(t-s)}.$$

Перепишем исходную систему для невозмущенного процесса в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \bar{\mathbf{B}}(t)\mathbf{z}(t) + \bar{\mathbf{f}}(t) + \hat{\mathbf{B}}(t)\mathbf{z}(t) + \hat{\mathbf{f}}(t) \quad (2.3.149)$$

Тогда

$$\mathbf{z}(t) = \bar{V}(t, 0)\mathbf{z}(0) + \int_0^t \bar{V}(t, \tau)\bar{\mathbf{f}}(\tau) d\tau + \int_0^t \bar{V}(t, \tau) \hat{B}(\tau)\mathbf{z}(\tau). \quad (2.3.150)$$

и

$$\bar{\mathbf{z}}(t) = \bar{V}(t, 0)\bar{\mathbf{z}}(0) + \int_0^t \bar{V}(t, \tau)\bar{\mathbf{f}}(\tau) d\tau. \quad (2.3.151)$$

А тогда в *любой* норме при любых начальных условиях справедлива оценка:

$$\|\mathbf{z}(t) - \bar{\mathbf{z}}(t)\| \leq \int_0^t \|\bar{V}(t, \tau)\| \left( \|\hat{B}(\tau)\| \|\mathbf{z}(\tau)\| + \|\hat{\mathbf{f}}(\tau)\| \right) d\tau + \|\bar{V}(t, 0)\| \|\mathbf{z}(0) - \bar{\mathbf{z}}(0)\|, \quad (2.3.152)$$

Далее,

$$\|\hat{B}(t)\|_{1D} = \|D\hat{B}(t)D^{-1}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \delta + \frac{1}{\delta}\right) \leq (1 + \delta)\varepsilon. \quad (2.3.153)$$

Кроме того,

$$\gamma(\bar{B}(t))_{1D} = \gamma(B(t))_{1D} + \|\hat{B}(t)\|_{1D} \leq -(1 - \delta^{-1})\theta(t) + (1 + \delta)\varepsilon, \quad (2.3.154)$$

$$\|\bar{V}(t, s)\|_{1D} \leq e^{-\int_s^t ((1-\delta^{-1})\theta(u) + (1+\delta)\varepsilon) du} \leq Re^{-(\nu - (1+\delta)\varepsilon)(t-s)}. \quad (2.3.155)$$

Оценим теперь

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}(t)\|_{1D} &\leq \|V(t)\mathbf{z}(0)\|_{1D} + \int_0^t \|V(t, \tau)\mathbf{f}(\tau)\|_{1D} d\tau \leq \\ &\leq Re^{-\nu t}\|\mathbf{z}(0)\|_{1D} + MR \int_0^t e^{-\nu(t-\tau)} d\tau \leq Re^{-\nu t}\|\mathbf{z}(0)\|_{1D} + \frac{MR}{\nu}. \end{aligned} \quad (2.3.156)$$

при любом  $\mathbf{p}(0)$ . Легко видеть, что  $\|\mathbf{f}(\tau)\| \leq \varepsilon$ .

Поэтому получаем следующую оценку

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}(t) - \bar{\mathbf{z}}(t)\| &\leq o(1) + \int_0^t Re^{-(\nu - (1+\delta)\varepsilon)(t-s)} \times \\ &\times \left( (1 + \delta)\varepsilon \left( Re^{-\nu s}\|\mathbf{z}(0)\|_{1D} + \frac{MR}{\nu} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \right) ds \leq o(1) + R\varepsilon \frac{2MR(1 + \delta) + \nu}{2\nu(\nu - (1 + \delta)\varepsilon)} \end{aligned} \quad (2.3.157)$$

Используя неравенство по сравнению норм

$$\|\mathbf{p}^1 - \mathbf{p}^2\| \leq 2\|\mathbf{z}^1 - \mathbf{z}^2\| \leq 4\|\mathbf{z}^1 - \mathbf{z}^2\|_{1D},$$

получаем нужное утверждение.

**Следствие 9.** Пусть интенсивности рождения, гибели и катастроф 1-периодичны. Пусть  $\int_0^1 (1 - \delta^{-1})(S\mu(t) - \delta\lambda(t))dt \geq \theta^* > 0$  при  $\delta \in (1, \frac{S}{S-1}]$  вместо **В**. Тогда

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq e^K \varepsilon \frac{4Me^K(1 + \delta) + 2\theta^*}{\theta^*(\theta^* - (1 + \delta)\varepsilon)}. \quad (2.3.158)$$

где  $K = \sup_{|t-s| < 1} \int_0^1 (1 - \delta^{-1})(S\mu(t) - \delta\lambda(t))dt < \infty$ .

### 2.3.5 Оценки для среднего

**С.** Пусть существуют  $\delta \in (1, \frac{S}{S-1}]$ , функция  $\psi(t)$  и положительные числа  $L$  и  $\omega$  такие, что

$$\xi(t) + (1 - \delta^{-1})(S\mu(t) - \delta\lambda(t)) \geq \psi(t); \quad e^{-\int_s^t \psi(u)du} \leq Le^{-\omega(t-s)},$$

для любых  $s, t, 0 \leq s \leq t$ . Пусть  $W = \inf_{k \geq 1} \frac{\delta^k}{k} > 0$ .

**Теорема 23.** Пусть выполняется условие **С**. Тогда для любых начальных условий  $\mathbf{p}(0)$  и  $\bar{\mathbf{p}}(0)$

$$\overline{\lim_{t \rightarrow \infty}} \|E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)\| \leq L\varepsilon \frac{2ML(1 + \delta) + 2\omega}{\omega(\omega - (1 + \delta)\varepsilon)}. \quad (2.3.159)$$

**Доказательство** проходит по той же схеме, что и доказательство теоремы (23). Для получения необходимых оценок для средних вводится пространство последовательностей  $l_{1E}$  и используется неравенство  $\|\mathbf{z}\|_{1E} \leq \frac{2}{W}\|\mathbf{z}\|_{1D}$ .

**Следствие 10.** Пусть интенсивности рождения, гибели и катастроф 1-периодичны. Пусть  $\int_0^1 (\xi(t) + (1 - \delta^{-1})(S\mu(t) - \delta\lambda(t)))dt \geq \vartheta^* > 0$  при  $\delta \in (1, \frac{S}{S-1}]$  вместо **С**. Тогда

$$\overline{\lim_{t \rightarrow \infty}} \|E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)\| \leq e^K \varepsilon \frac{2Me^K(1 + \delta) + 2\vartheta^*}{\vartheta^*(\vartheta^* - (1 + \delta)\varepsilon)}. \quad (2.3.160)$$

где  $K = \sup_{|t-s| < 1} \int_0^1 (\xi(\tau) + (1 - \delta^{-1})(S\mu(\tau) - \delta\lambda(\tau)))d\tau < \infty$ .

### 2.3.6 Примеры

**Пример 7.**  $S = 1$ ,  $\lambda(t) \equiv 1$ ,  $\mu(t) \equiv 4$ ,  $\xi(t) \equiv 0$ ,  $\varepsilon = 0$ .

Тогда это ПРГ. Пусть  $\delta = 2$ , тогда **(В)** выполняется при  $R = 1$  и  $\nu = 1$ . Условия теорем выполнены. С другой стороны, рассмотрим возмущенный процесс с матрицей интенсивностей  $\hat{A}(t)$ , где  $\hat{a}_{00} = -\varepsilon$ ,  $\hat{a}_{k0}(t) = \frac{\varepsilon}{k(k+1)}$  для

$k \geq 1$  и  $\hat{a}_{ij} = 0$  в остальных случаях. Тогда  $\bar{X}(t)$  не эргодичный процесс, так как предположение  $\bar{A}\bar{\mathbf{p}} = 0$  дает нам неравенство  $4\bar{p}_{k+1} = \bar{p}_k + \bar{p}_0 \frac{\varepsilon}{k+1} \geq \bar{p}_0 \frac{\varepsilon}{k+1}$ , что невозможно.

**Пример 8.** Рассмотрим нестационарную модель, описывающую число клиентов страховой компании.

$$S = 10, \lambda(t) = 20 + \sin 2\pi t, \mu(t) = 2 + \cos 2\pi t, \xi(t) \equiv 2, \varepsilon = 10^{-6}.$$

Имеем  $Q = 1, \beta = 2, \delta = \frac{10}{9}, M = 21, \vartheta^* = 1.778, K = 2.131, W = \frac{\delta^{10}}{10}$ , тогда

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq 10^{-6} \quad (2.3.161)$$

и

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)\| \leq 6.963 \cdot 10^{-3}. \quad (2.3.162)$$

Предельные характеристики будем строить при  $m_1 = 112, t \in [11, 12]$  (предельный режим) и  $m_2 = 120, t \in [36, 37]$  (предельное среднее).

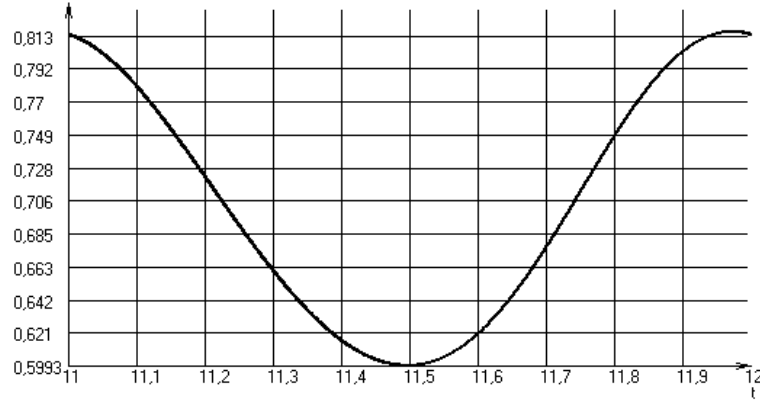


Рис. 2.16: Приближенное значение предельной величины  $\bar{J}_0(t) = \Pr(\bar{X}(t) = 0)$  (пример 8)

**Пример 9.**  $S = 10, \lambda(t) = 2 + \sin 2\pi t, \mu(t) = 2 + \cos 2\pi t, \xi(t) \equiv 0, \varepsilon = 10^{-6}$ .

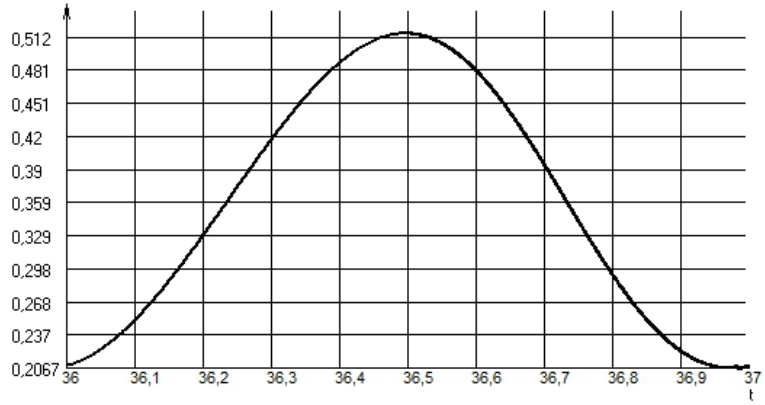


Рис. 2.17: Приближенное значение предельного среднего  $\bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)$  (пример 8)

Тогда  $\delta = \frac{19}{18}$ ,  $M = 3$ ,  $\theta^* = \vartheta^* = 0.942$ ,  $K = 1.127$ ,  $W = \frac{\delta^{10}}{10}$  и мы имеем

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq 2.715 \cdot 10^{-4} \quad (2.3.163)$$

и

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)\| \leq 7.905 \cdot 10^{-4}. \quad (2.3.164)$$

Предельные характеристики будем строить при  $m_1 = 113$ ,  $t \in [6, 7]$  (предельный режим) и  $m_2 = 114$ ,  $t \in [7, 8]$  (предельное среднее).

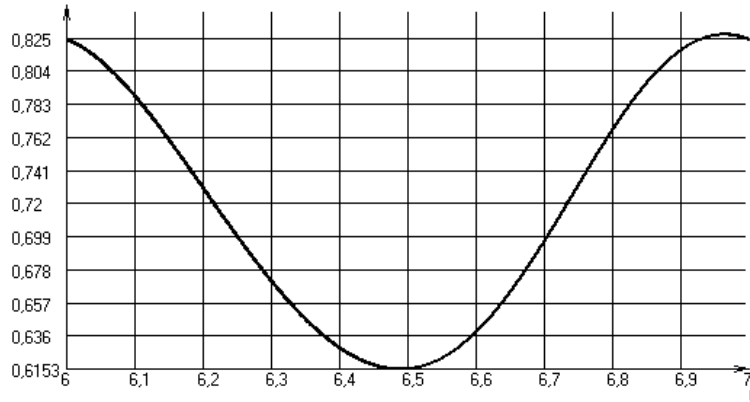


Рис. 2.18: Приближенное значение предельной величины  $\bar{J}_0(t) = \Pr(\bar{X}(t) = 0)$  (пример 9)

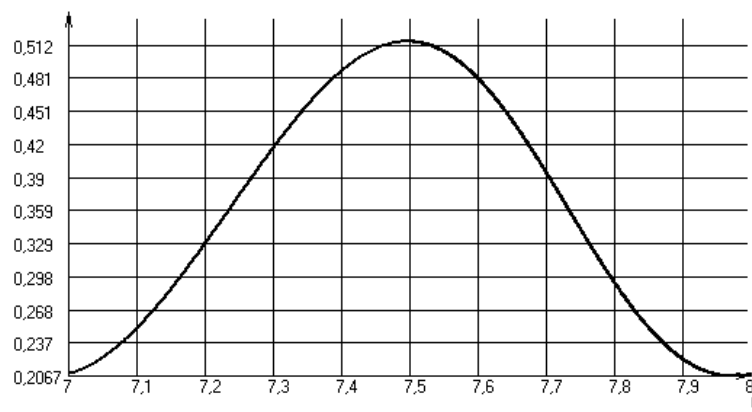


Рис. 2.19: Приближенное значение предельного среднего  $\bar{E}_p(t)$  (пример 9)

## Глава 3

# Система обслуживания М/М/Н/Н

В этой главе получены новые оценки сходимости и более простые оценки устойчивости нестационарной системы  $M_t/M_t/N/N$ .

### 3.1 Введение

Пусть  $X = X(t)$ ,  $t \geq 0$  - число требований в момент  $t$  для описываемой модели (процесс рождения и гибели),  $\lambda_n(t) = \lambda(t)$ ,  $\mu_n(t) = n\mu(t)$  - интенсивности рождения и гибели соответственно, локально интегрируемые на  $[0, \infty)$ . Обозначим через  $p_{ij}(s, t) = Pr \{X(t) = j | X(s) = i\}$ ,  $i, j \geq 0$ ,  $0 \leq s \leq t$ , переходные вероятности процесса  $X = X(t)$ , а через  $p_i(t) = Pr \{X(t) = i\}$  - его вероятности состояний.

Тогда для описания процесса получаем прямую систему Колмогорова

$$\begin{cases} \frac{dp_0}{dt} = -\lambda(t)p_0 + \mu(t)p_1, \\ \frac{dp_k}{dt} = \lambda(t)p_{k-1} - (\lambda(t) + k\mu(t))p_k + (k+1)\mu(t)p_{k+1}, 1 \leq k \leq N-1, \\ \frac{dp_N}{dt} = \lambda(t)p_{N-1} - N\mu(t)p_N \end{cases} \quad (3.1.1)$$

или в виде дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{A}(t) \mathbf{p}, \quad t \geq 0, \quad (3.1.2)$$

в пространстве последовательностей  $l_1$ , где  $\mathbf{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots)^T$  - вектор-столбец вероятностей состояний, а  $\mathbf{A}(t) = \{a_{ij}(t)\}$ ,  $t \geq 0$  - матрица, порожаемая системой (3.1.1).

Обозначим через  $\Omega = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq 0, \|\mathbf{x}\|_1 = 1\}$  множество всех стохастических векторов.

### 3.2 Оценки скорости сходимости

Пусть  $X(t)$  - ПРГ с конечным числом состояний  $\{0, \dots, S\}$  и пусть  $\lambda_n(t), \mu_{n+1}(t)$ ,  $n = 0, \dots, S-1$  - интенсивности рождения и гибели соответственно.

Пусть  $\delta_k > 0$ ,  $1 \leq k \leq S-1$ . Пусть

$$\alpha_k(t) = \lambda_k(t) + \mu_{k+1}(t) - \delta_{k+1}\lambda_{k+1}(t) - \delta_k^{-1}\mu_k(t), \quad k = 0, \dots, S-1, \quad (3.2.3)$$

и

$$\zeta_k(t) = \lambda_k(t) + \mu_{k+1}(t) + \delta_{k+1}\lambda_{k+1}(t) + \delta_k^{-1}\mu_k(t), \quad k = 0, \dots, S-1, \quad (3.2.4)$$

где  $\delta_0^{-1} = \delta_S = 0$ ,  $\delta_0 = 1$ . Обозначим

$$\min_{0 \leq k \leq S-1} \alpha_k(t) = \beta(t),$$

$$\max_{0 \leq k \leq S-1} \zeta_k(t) = \chi(t),$$

$$d_k = \Pi_{i=0}^{k-1} \delta_i, \quad \theta = \max_{1 \leq i \leq N+R} d_i, \quad d = \min_{1 \leq i \leq N+R} d_i.$$

**Теорема 24.** *Справедливы оценки ( $t \geq s$ ):*

$$\frac{d}{4\theta} e^{-\int_s^t \chi(\tau) d\tau} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\| \leq \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq \frac{4\theta}{d} e^{-\int_s^t \beta(\tau) d\tau} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|. \quad (3.2.5)$$

**Доказательство.** Имеем систему

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{A}(t) \mathbf{p}, \quad t \geq 0, \quad (3.2.6)$$

где  $\mathbf{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots, p_S(t))^T$  вектор-столбец,  $\mathbf{A}(t) = \{a_{ij}(t)\}_{i,j=1}^S$ ,  $t \geq 0$  - матрица интенсивностей процесса:

$$a_{ij}(t) = \begin{cases} \lambda_{i-1}(t), & \text{если } j = i - 1, \\ \mu_{i+1}(t), & \text{если } j = i + 1, \\ -(\lambda_i(t) + \mu_i(t)), & \text{если } j = i, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.2.7)$$

Рассмотрим пространство  $l_{1D}$  из векторов  $\mathbf{z} = (p_1, p_2, \dots, p_S)^T$  таких, что  $\|\mathbf{z}\|_{1D} = \|D\mathbf{z}\| < \infty$ , где

$$D = \begin{pmatrix} d_0 & d_0 & d_0 & \cdots & d_0 \\ 0 & d_1 & d_1 & \cdots & d_1 \\ 0 & 0 & d_2 & \cdots & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{S-1} \end{pmatrix} \quad (3.2.8)$$

Тогда получаем следующую систему из (3.2.6)

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = B(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}(t), \quad (3.2.9)$$

где  $\mathbf{z}(t) = (p_1, p_2, \dots, p_S)^T$ ,  $\mathbf{f}(t) = (\lambda_0, 0, \dots, 0)^T$ ,  $B(t) = (b_{ij})_{i,j=1}^S$  (подробнее см. в [51]).

Пусть  $\mathbf{x}(t) = (x_1, x_2, \dots, x_S)$ . Тогда

$$\|\mathbf{x}\|_{1D} = \|D\mathbf{x}\| \leq \|D\| \|\mathbf{x}\| \leq \theta \|\mathbf{x}\|; \quad (3.2.10)$$

$$\|\mathbf{x}\| = \|D^{-1}D\mathbf{x}\| \leq \|D^{-1}\| \|\mathbf{x}\|_{1D} \leq \frac{2}{d} \|\mathbf{x}\|_{1D} \quad (3.2.11)$$

и

$$\frac{d}{2} \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|_{1D} \leq \theta \|\mathbf{x}\|. \quad (3.2.12)$$

Рассмотрим логарифмическую норму  $B(t)$  в пространстве  $l_{1D}$

$$\begin{aligned} \gamma(B(t))_{1D} &= \gamma(D_k B(t) D_k^{-1}) = \max_{0 \leq i \leq S-1} (-\lambda_i(t) - \mu_{i+1} + \delta_{i+1} \lambda_{i+1} + \delta_i^{-1} \mu_i) = \\ &= -\min_{0 \leq i \leq S-1} (\lambda_i(t) + \mu_{i+1} - \delta_{i+1} \lambda_{i+1} - \delta_i^{-1} \mu_i) = -\beta(t). \end{aligned}$$

и логарифмическая норма  $-B(t)$

$$\gamma(-B(t))_{1D} = \max_{0 \leq i \leq S-1} (\lambda_i(t) + \mu_{i+1}(t) + \sigma_{i+1} \lambda_{i+1}(t) + \sigma_i^{-1} \mu_i(t)) = \chi(t).$$

Тогда получаем следующую оценку в  $1D$ -норме (см. в [51]) для любых  $t, s$  ( $0 \leq s \leq t$ )

$$e^{-\int_s^t \chi(\tau) d\tau} \leq \|V(t, s)\|_{1D} \leq e^{-\int_s^t \beta(\tau) d\tau}, \quad (3.2.13)$$

где  $V(t, s)$  - оператор Коши уравнения (3.2.9).

Используя (3.2.12), получаем для всех  $t \geq s$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| &\leq 2\|\mathbf{z}^*(t) - \mathbf{z}^{**}(t)\| \leq \frac{4}{d}\|\mathbf{z}^*(t) - \mathbf{z}^{**}(t)\|_{1D} \leq \frac{4}{d}e^{-\int_s^t \beta(\tau) d\tau} \|\mathbf{z}^*(s) - \mathbf{z}^{**}(s)\|_{1D} \leq \\ &\leq \frac{4}{d}e^{-\int_s^t \beta(\tau) d\tau} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|_{1D} \leq \frac{4\theta}{d}e^{-\int_s^t \beta(\tau) d\tau} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|. \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Для любых решений  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$  системы (3.2.9)

$$\|\mathbf{y}_1(t) - \mathbf{y}_2(t)\|_{1D} \geq e^{-\int_s^t \chi(\tau) d\tau} \|\mathbf{y}_1(s) - \mathbf{y}_2(s)\|_{1D}. \quad (3.2.15)$$

Пусть теперь  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$  такие, что

$$\mathbf{p}^*(s) = (1 - \|\mathbf{y}_1(s)\|, \quad \mathbf{y}_1^T(s))^T; \quad \mathbf{p}^{**}(s) = (1 - \|\mathbf{y}_2(s)\|, \quad \mathbf{y}_2^T(s))^T. \quad (3.2.16)$$

Используя (3.2.11) и (3.2.15), получаем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| &\geq \frac{1}{\theta} \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_{1D} = \frac{1}{\theta} \|\mathbf{y}_1(t) - \mathbf{y}_2(t)\|_{1D} \geq \\ &\geq \frac{1}{\theta} e^{-\int_s^t \chi(\tau) d\tau} \|\mathbf{y}_1(s) - \mathbf{y}_2(s)\|_{1D} = \\ &= \frac{1}{\theta} e^{-\int_s^t \chi(\tau) d\tau} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|_{1D} \geq \frac{d}{4\theta} e^{-\int_s^t \chi(\tau) d\tau} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|. \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Заметим, что равенство  $\int_0^\infty \beta(\tau) d\tau = +\infty$  влечет слабую эргодичность  $X(t)$ .

**Замечание 8.** При выполнении условий теоремы 9 справедлива оценка при  $t \geq s$

$$e^{-\int_s^t \chi(\tau) d\tau} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|_{1D} \leq \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_{1D} \leq e^{-\int_s^t \beta(\tau) d\tau} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|. \quad (3.2.18)$$

Пусть  $\beta^*(t) = \max_{0 \leq k \leq S-1} \alpha_k$ .

**Теорема 25.** Пусть  $D(\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)) \leq \mathbf{0}$  (или  $D(\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)) \geq \mathbf{0}$ ). Тогда

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \geq \frac{d}{2\theta} e^{-\int_s^t \beta^*(u) du} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|. \quad (3.2.19)$$

для любых  $s \geq 0$ ,  $t \geq s$ .

**Доказательство.** Рассмотрим (3.2.9) как уравнение в пространстве  $l_{1D}$ . Пусть  $\mathbf{v}(t) = D(\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t))^T$ . Тогда в  $l_1$ -норме

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = DB(t)D^{-1}\mathbf{v}(t). \quad (3.2.20)$$

Пусть  $l_1^+$  из  $l_1$ -векторов с неотрицательными координатами. Все внедиагональные элементы матрицы  $DB(t)D^{-1}$  неотрицательны для всех  $t \geq 0$ . Поэтому, если  $\mathbf{v}(s) \geq 0$  для некоторого  $s \geq 0$ , тогда  $\mathbf{v}(t) \geq 0$  для всех  $t \geq 0$ .

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\{\sum v_i\}}{dt} &\geq \{\sum v_i\} \min_k (-\lambda_k(t) - \mu_{k+1}(t) + \delta_{k+1}\lambda_{k+1}(t) + \delta_k^{-1}\mu_k(t)) = \\ &= -\{\sum v_i\} \max_k (\lambda_k(t) + \mu_{k+1}(t) - \delta_{k+1}\lambda_k(t) - \delta_k^{-1}\mu_k(t)) = -\beta^*(t)\{\sum v_i\}. \end{aligned}$$

Следовательно для всех  $t \geq s$  (см. (3.2.12)),

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| &\geq \frac{1}{\theta} \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_{1D} = \frac{\|\mathbf{v}(t)\|}{\theta} = \frac{\sum v_i(t)}{\theta} \geq \\ &\geq \frac{1}{\theta} e^{-\int_s^t \beta^*(\tau) d\tau} \sum v_i(s) = \frac{1}{\theta} e^{-\int_s^t \beta^*(\tau) d\tau} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|_{1D} \geq \\ &\geq \frac{d}{2\theta} e^{-\int_s^t \beta^*(\tau) d\tau} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|. \quad (3.2.21) \end{aligned}$$

**Замечание 9.** Пусть  $D(\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)) \leq \mathbf{0}$  (или  $D(\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)) \geq \mathbf{0}$ ). Тогда

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_{1D} \geq e^{-\int_s^t \beta^*(u) du} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|_{1D}. \quad (3.2.22)$$

для любых  $s \geq 0$ ,  $t \geq s$ .

### 3.3 Оценки устойчивости

Пусть  $d_i$ ,  $1 \leq i \leq N$  - некоторые положительные числа. Рассмотрим

$$\alpha_k(t) = \lambda(t) + k\mu(t) - \frac{d_{k+1}}{d_k} \lambda(t) - \frac{d_{k-1}}{d_k} (k-1)\mu(t), \quad 1 \leq k \leq N, \quad (3.3.23)$$

где  $d_0 = d_{N+1} = 0$ , и пусть  $G = \sum_1^N d_i$ ,  $d = \min_i d_i$ .

**Теорема 26.** Пусть существует последовательность положительных чисел  $\{d_j\}$  и  $\beta > 0$  такое, что  $\alpha_i(t) \geq \beta$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $t \geq 0$ . Тогда справедливы следующие оценки:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{\varepsilon (1 + \ln \frac{4G}{d})}{\beta}, \quad (3.3.24)$$

и

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq \frac{\varepsilon N (1 + \ln \frac{4G}{d})}{\beta}, \quad (3.3.25)$$

для любых начальных условий  $p(0)$  и  $\bar{p}(0)$  процессов  $X(t)$  и  $\bar{X}(t)$  соответственно.

**Доказательство.** Поскольку  $\mathbf{p}(t) \in \Omega$  при всех  $t \geq s$ , можно положить  $p_0(t) = 1 - \sum_{i \geq 1} p_i(t)$ , и получим систему

$$\begin{pmatrix} \frac{dp_1}{dt} \\ \frac{dp_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dp_N}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\lambda + \mu) & (2\mu - \lambda) & -\lambda & -\lambda & \cdots & \cdots \\ \lambda & -(\lambda + 2\mu) & 3\mu & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda & -(\lambda + 3\mu) & 4\mu & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.26)$$

или, в векторном виде,

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = B(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}(t). \quad (3.3.27)$$

Решение этого неоднородного уравнения можно записать в виде

$$\mathbf{z}(t) = V(t, 0)\mathbf{z}(0) + \int_0^t V(t, z)\mathbf{f}(z) dz, \quad (3.3.28)$$

где  $V(t, z)$  - оператор Коши уравнения (3.3.27).

Рассмотрим треугольную матрицу

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & d_1 & d_1 & \cdots & d_1 \\ 0 & d_2 & d_2 & \cdots & d_2 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & d_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_N \end{pmatrix} \quad (3.3.29)$$

и норму  $\|x\|_{1D} = \|Dx\|$ , причем  $\|B\|_{1D} = \|DBD^{-1}\|$ .

Рассмотрим теперь логарифмическую норму  $\gamma(B(t))_{1D} = \gamma(DB(t)D^{-1})_1$ .

$$\gamma(B)_{1D} = \max_{i \geq 1} \left( \frac{d_{i+1}}{d_i} \lambda(t) - (\lambda(t) + (i+1)\mu(t)) + \frac{d_{i-1}}{d_i} i\mu(t) \right) \leq -\beta.$$

Получаем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| &\leq 2\|\mathbf{z}^*(t) - \mathbf{z}^{**}(t)\| = 2\|D^{-1}D(\mathbf{z}^*(t) - \mathbf{z}^{**}(t))\| \leq \\ &\leq \frac{4}{d}\|\mathbf{z}^*(t) - \mathbf{z}^{**}(t)\|_{1D} \leq \frac{4}{d}e^{-\beta(t-s)}\|\mathbf{z}^*(s) - \mathbf{z}^{**}(s)\|_{1D} \leq \\ &\leq \frac{4G}{d}e^{-\beta(t-s)}\|\mathbf{z}^*(s) - \mathbf{z}^{**}(s)\| \leq \frac{4G}{d}e^{-\beta(t-s)}\|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\| \leq \frac{8G}{d}e^{-\beta(t-s)} \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

для любых начальных условий  $\mathbf{p}^*(s), \mathbf{p}^{**}(s)$  и любых  $s, t$ ,  $0 \leq s \leq t$ .

Применим далее теорему 8. Пусть

$$\beta(t, s) = \sup_{\|\mathbf{v}\|=1, \sum v_i=0} \|U(t)\mathbf{v}\| = \frac{1}{2} \max_{i,j} \sum_k |p_{ik}(t, s) - p_{jk}(t, s)|, \quad (3.3.31)$$

где  $U(t, s)$  – матрица Коши уравнения (3.2.6),  $p_{ik}(t, s) = Pr \{X(t) = k | X(s) = i\}$ .

Имеем

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \begin{cases} \|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\| + (t-s)\varepsilon, & 0 < t-s < b^{-1} \ln \frac{c}{2}, \\ b^{-1}(\ln \frac{c}{2} + 1 - ce^{-b(t-s)})\varepsilon + \frac{c}{2}e^{-b(t-s)}\|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\|, & t-s \geq b^{-1} \ln \frac{c}{2} \end{cases} \quad (3.3.32)$$

для любых начальных условий  $\mathbf{p}(s)$  и  $\bar{\mathbf{p}}(s)$ . Устремив  $t-s \rightarrow \infty$ , получаем нужное утверждение.

**Теорема 27.** Пусть  $\lambda(t)$  и  $\mu(t)$  1-периодичны и существует положительное число  $\beta^*$  такое, что  $\alpha_i(t) \geq \beta(t)$ ,  $\int_0^1 \beta(t)dt \geq \beta^*$ . Пусть также выполняется условие

$$K = \sup_{|t-s| \leq 1} \int_s^t \beta(\tau) d\tau < \infty.$$

Тогда справедливы следующие оценки

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{\varepsilon \left(1 + \ln \frac{4Ge^K}{d}\right)}{\beta^*}, \quad (3.3.33)$$

и

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}(t)} - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq \frac{\varepsilon N \left(1 + \ln \frac{4Ge^K}{d}\right)}{\beta^*}, \quad (3.3.34)$$

для любых начальных условий  $\mathbf{p}(0)$  и  $\bar{\mathbf{p}}(0)$  процессов  $X(t)$  и  $\bar{X}(t)$  соответственно.

**Доказательство.** Имеем

$$e^{-\int_s^t \beta(u) du} \leq e^K e^{-\beta^*(t-s)}. \quad (3.3.35)$$

Утверждение получаем, подставляя в теорему  $c = \frac{8Ge^K}{d}$ ,  $b = \beta^*$ .

### 3.4 Примеры

**Пример 10.** Пусть  $\lambda(t) = 2 + \sin 2\pi t$ ,  $\mu(t) = 1 + \cos 2\pi t$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Пусть все  $d_i = 1$ , тогда  $\beta(t) = \mu(t) = 1 + \cos 2\pi t$ ,  $G = N$ ,  $d = 1$ .

Получаем следующие оценки:

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq 8Ne^{-\int_0^t (1+\cos 2\pi u) du} \leq 16Ne^{-t}, \quad (3.4.36)$$

$$\|E_{\mathbf{p}^*} - E_{\mathbf{p}^{**}}\| \leq 16N^2e^{-t}. \quad (3.4.37)$$

Пусть  $N = 5000$ , тогда

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq 1.3 \cdot 10^{-5}, \quad (3.4.38)$$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|E_{\mathbf{p}^*} - E_{\mathbf{p}^{**}}\| \leq 0.065. \quad (3.4.39)$$

Далее,  $16Ne^{-t} \leq 2.035 \cdot 10^{-8}$  и  $16N^2e^{-t} \leq 1.02 \cdot 10^{-4}$  при  $t \geq 29$ , и мы можем построить предельные характеристики обоих процессов на интервале  $[29, 30]$ .

Кроме того,  $\bar{p}_N(t) \approx p_N(t) \approx 0$ , двойное среднее  $\bar{E} \approx E = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \phi(u) du}{t} \approx 2.103$ ,  $\bar{p}_0(t) \approx p_0(t)$ .

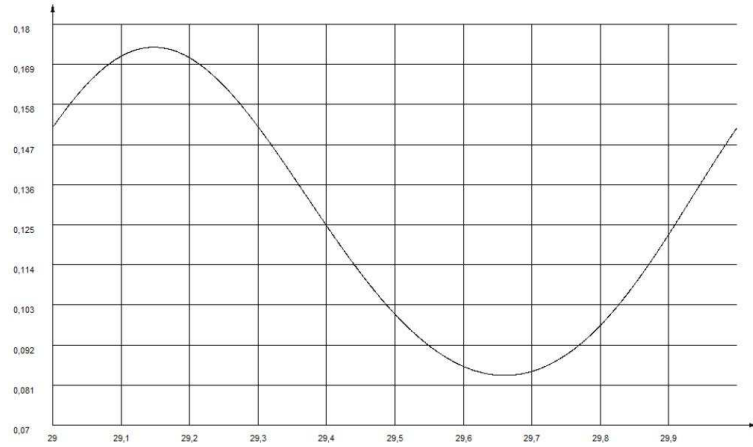


Рис. 3.1: Приближенное значение предельной величины  $\bar{p}_0(t) = Pr(\bar{X}(t) = 0)$  (пример 10)

**Пример 11.** Пусть  $\lambda(t) = N(2 + \sin 2\pi t)$ ,  $\mu(t) = 1 + \cos 2\pi t$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Пусть все  $d_i = 1$ , тогда  $\beta(t) = 1 + \cos 2\pi t$ ,  $G = N$ ,  $d = 1$ .

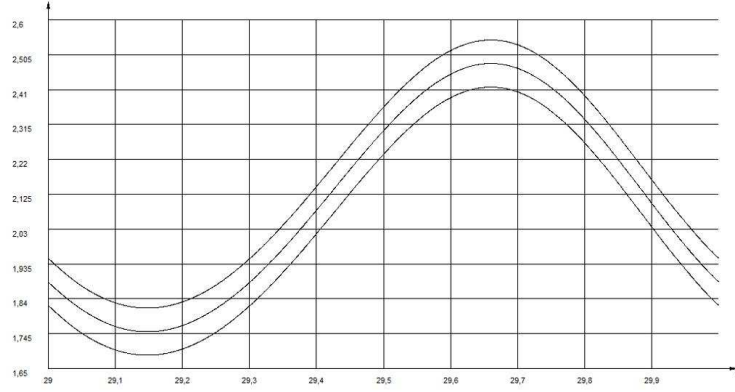


Рис. 3.2: Приближенное значение предельного среднего для возмущенного процесса  $\bar{\phi}(t) = \bar{E}_0(t)$

(пример 10)

Получаем следующие оценки:

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq 8Ne^{-\int_0^t (1+\cos 2\pi u) du} \leq 16Ne^{-t}, \quad (3.4.40)$$

$$\|E_{\mathbf{p}^*} - E_{\mathbf{p}^{**}}\| \leq 16N^2e^{-t}, \quad (3.4.41)$$

Пусть  $N = 1000$ , тогда

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq 1.14 \cdot 10^{-5}, \quad (3.4.42)$$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|E_{\mathbf{p}^*} - E_{\mathbf{p}^{**}}\| \leq 0.012, \quad (3.4.43)$$

Далее,  $16Ne^{-t} \leq 4.07 \cdot 10^{-9}$  и  $16N^2e^{-t} \leq 4.0699 \cdot 10^{-6}$  при  $t \geq 29$ , и мы можем построить предельные характеристики обоих процессов на интервале  $[29, 30]$ .

Кроме того,  $\bar{p}_0(t) \approx p_0(t) \approx 0$ , двойное среднее  $\bar{E} \approx E = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \phi(u) du}{t} \approx 984.64$ ,  $\bar{p}_N(t) \approx p_N(t)$ ,  $\bar{\phi}(t) \approx \phi(t)$ .

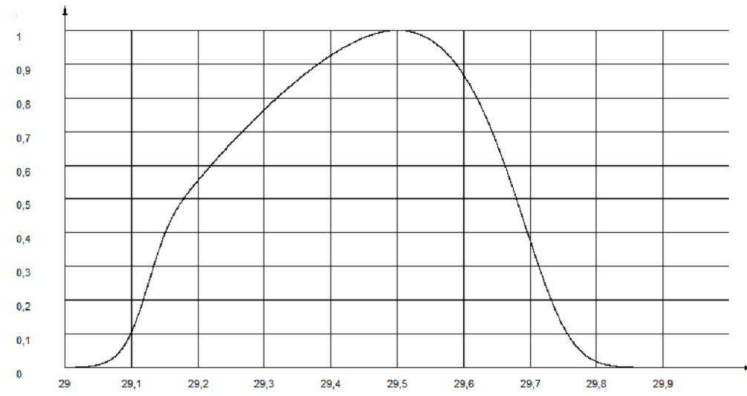


Рис. 3.3: Приближенное значение предельной величины  $\bar{p}_N(t)$   
(пример 11)

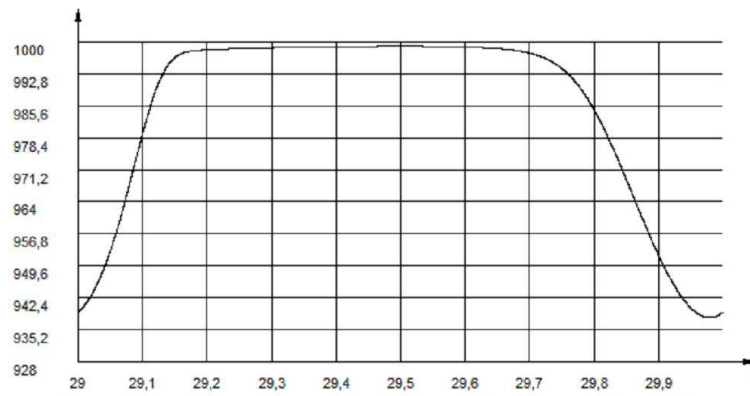


Рис. 3.4: Приближенное значение предельного среднего для возмущенного процесса  $\bar{\phi}(t) = \bar{E}_0(t)$   
(пример 11)

## Глава 4

# Система обслуживания $M/M/N/N+R$

В данной главе рассмотрена модель обслуживания  $M/M/N/N+R$ . Получены общие оценки сходимости и оценки устойчивости.

### 4.1 Введение

Рассмотрим модель с  $N$  серверами и  $R \geq 0$  местами ожидания. Пусть  $X(t)$  - число клиентов в очереди. Тогда  $X(t)$  - процесс рождения и гибели с пространством состояний  $E_{N+R} = \{0, 1, \dots, N+R\}$  и интенсивностями рождения и гибели  $a_n(t) = \lambda(t)$ ,  $b_n(t) = \mu(t) \min(n, N)$  соответственно. Наиболее известна модель при  $R = 0$  - это система потерь Эрланга. Общий подход для изучения нестационарных ПРГ был предложен в [58, 59], см. [31, 32, 33, 51]. Здесь изучены прямая система Колмогорова и специальные преобразования матрицы интенсивностей.

### 4.2 Общие оценки устойчивости

Рассмотрим «возмущенный» ПРГ  $\bar{X} = \bar{X}(t)$ ,  $t \geq 0$ , обозначая через  $\bar{\lambda}_n(t)$  и  $\bar{\mu}_n(t)$  его интенсивности рождения и гибели соответственно. Введем обозначение  $\hat{A}(t) = A(t) - \bar{A}(t)$ . Для простоты записи оценок будем предполагать,

что возмущения «равномерно малы», то есть при всех  $n$  и почти всех  $t \geq 0$  выполняется неравенство  $\|\hat{A}(t)\| \leq \varepsilon$ .

Пусть  $d_1, \dots, d_{N+R}$  - некоторые положительные числа. Положим

$$\alpha_k(t) = \lambda_{k-1}(t) + \mu_k(t) - \frac{d_{k+1}}{d_k} \lambda_k(t) - \frac{d_{k-1}}{d_k} \mu_{k-1}(t), \quad 1 \leq k \leq N+R, \quad (4.2.1)$$

где  $d_0 = d_{N+R+1} = 0$ . Пусть  $G = \sum_{i=1}^{N+R} d_i$ ,  $d = \min_{i=1}^{N+R} d_i$ .

**Теорема 28.** Пусть существует последовательность положительных чисел  $\{d_j\}$  такая, что  $\alpha_i(t) \geq \theta > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N+R$ ,  $t \geq 0$ . Тогда справедливы следующие оценки:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{\varepsilon \left(1 + \ln \frac{4G}{d}\right)}{\theta}, \quad (4.2.2)$$

и

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}(t)} - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}(t)| \leq \frac{\varepsilon(N+R) \left(1 + \ln \frac{4G}{d}\right)}{\theta}, \quad (4.2.3)$$

для любых начальных условий  $\mathbf{p}(0)$  и  $\bar{\mathbf{p}}(0)$  процессов  $X(t)$  и  $\bar{X}(t)$  соответственно.

**Доказательство.** Поскольку  $\mathbf{p}(t) \in \Omega$  при всех  $t \geq s$ , можно положить  $p_0(t) = 1 - \sum_{i \geq 1} p_i(t)$ , и получим систему

$$\begin{pmatrix} \frac{dp_1}{dt} \\ \frac{dp_2}{dt} \\ \frac{dp_3}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dp_{N+R}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\lambda_0 + \lambda_1 + \mu_1) & (\mu_2 - \lambda_0) & -\lambda_0 & -\lambda_0 & -\lambda_0 & -\lambda_0 & \cdots & -\lambda_0 \\ \lambda_1 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \mu_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & -(\lambda_3 + \mu_3) & \mu_4 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & . & . & . & . & . & \lambda_{N+R-1} & -\mu_{N+R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_{N+R} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.4)$$

или, в векторном виде,

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = B(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}(t). \quad (4.2.5)$$

Решение этого неоднородного уравнения выглядит следующим образом

$$\mathbf{z}(t) = V(t, s)\mathbf{z}(s) + \int_s^t V(t, z)\mathbf{f}(z) dz, \quad (4.2.6)$$

где  $V(t, z)$  - оператор Коши уравнения (4.2.5).

Рассмотрим треугольную матрицу

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & d_1 & d_1 & \cdots & d_1 \\ 0 & d_2 & d_2 & \cdots & d_2 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & d_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{N+R} \end{pmatrix} \quad (4.2.7)$$

и норму  $\|x\|_{1D} = \|Dx\|$ , причем  $\|B\|_{1D} = \|DBD^{-1}\|$ .

Рассмотрим теперь логарифмическую норму  $\gamma(B(t))_{1D} = \gamma(DB(t)D^{-1})$ .  
Имеем

$$DB(t)D^{-1} = \begin{pmatrix} -(\lambda_0 + \mu_1) & \frac{d_1}{d_2}\mu_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{d_2}{d_1}\lambda_1 & -(\lambda_1 + \mu_2) & \frac{d_2}{d_3}\mu_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{d_3}{d_2}\lambda_2 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{d_{N+R-1}}{d_{N+R}}\mu_{N+R-1} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{d_{N+R}}{d_{N+R-1}}\lambda_{N+R-1} & -(\lambda_{N+R-1} + \mu_{N+R}) \end{pmatrix} \quad (4.2.8)$$

и, следовательно,

$$\gamma(B)_{1D} = \max_{i \geq 1} \left( \frac{d_{i+1}}{d_i} \lambda_i(t) - (\lambda_{i-1}(t) + \mu_i(t)) + \frac{d_{i-1}}{d_i} \mu_{i-1}(t) \right) \leq -\theta.$$

Получаем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| &\leq 2\|\mathbf{z}^*(t) - \mathbf{z}^{**}(t)\| = 2\|D^{-1}D(\mathbf{z}^*(t) - \mathbf{z}^{**}(t))\| \leq \\ &\leq \frac{4}{d}\|\mathbf{z}^*(t) - \mathbf{z}^{**}(t)\|_{1D} \leq \frac{4}{d}e^{-\theta(t-s)}\|\mathbf{z}^*(s) - \mathbf{z}^{**}(s)\|_{1D} \leq \\ &\leq \frac{4G}{d}e^{-\theta(t-s)}\|\mathbf{z}^*(s) - \mathbf{z}^{**}(s)\| \leq \frac{4G}{d}e^{-\theta(t-s)}\|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\| \leq \frac{8G}{d}e^{-\theta(t-s)} \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

для любых начальных условий  $\mathbf{p}^*(s), \mathbf{p}^{**}(s)$  и любых  $s, t$ ,  $0 \leq s \leq t$ .

Рассмотрим прямую систему Колмогорова, соответствующую возмущенному процессу:

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \bar{\mathbf{A}}(t)\bar{\mathbf{p}}(t) \quad (4.2.10)$$

Применим теорему 8. Пусть

$$\beta(t, s) = \sup_{\|\mathbf{v}\|=1, \sum v_i=0} \|U(t)\mathbf{v}\| = \frac{1}{2} \max_{i,j} \sum_k |p_{ik}(t, s) - p_{jk}(t, s)|, \quad (4.2.11)$$

где  $U(t, s)$  - матрица Коши уравнения (3.2.6),  $p_{ik}(t, s) = Pr \{X(t) = k | X(s) = i\}$ .

Имеем

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \begin{cases} \|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\| + (t-s)\varepsilon, & 0 < t < b^{-1} \ln \frac{c}{2}, \\ b^{-1}(\ln \frac{c}{2} + 1 - \frac{c}{2}e^{-b(t-s)})\varepsilon + \frac{c}{2}e^{-b(t-s)}\|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\|, & t \geq b^{-1} \ln \frac{c}{2} \end{cases} \quad (4.2.12)$$

для любых начальных условий  $\mathbf{p}(s)$  и  $\bar{\mathbf{p}}(s)$ . Устремив  $t - s \rightarrow \infty$ , получаем нужное утверждение.

Для доказательства второй оценки в качестве основного выберем пространство последовательностей  $l_{1E} = \{\mathbf{z} = (p_1, p_2, \dots, p_{N+R})\} \subset l_1$  таких, что  $\|\mathbf{z}\|_{1E} = \sum_k k|p_k| < \infty$ . Легко видеть, что тогда  $|E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)| \leq \sum_k k|p_k(t) - \bar{p}_k(t)| \leq (N+R)\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\|$ .

**Следствие 11.** Пусть  $\lambda(t)$  и  $\mu(t)$  1-периодичны. Пусть существуют последовательность положительных чисел  $\{d_i\}$  и положительное число  $\phi^* \leq \int_0^1 \phi(t)dt$ , где  $\phi \leq \alpha_i(t)$  и  $i = 1, 2, \dots, N+R$ ,  $0 \leq t \leq 10$ . Пусть также

$$K = \sup_{|t-s| \leq 1} \int_s^t \phi(\tau) d\tau < \infty. \quad (4.2.13)$$

Тогда справедливы следующие оценки

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{\varepsilon \left(1 + \ln \frac{4Ge^K}{d}\right)}{\phi^*}, \quad (4.2.14)$$

и

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)| \leq \frac{\varepsilon(N+R) \left(1 + \ln \frac{4Ge^K}{d}\right)}{\phi^*}, \quad (4.2.15)$$

для любых начальных условий  $\mathbf{p}(0)$  и  $\bar{\mathbf{p}}(0)$  процессов  $X(t)$  и  $\bar{X}(t)$  соответственно.

**Доказательство.** Имеем

$$e^{-\int_s^t \phi(u) du} \leq e^K e^{-\phi^*(t-s)}. \quad (4.2.16)$$

**Следствие 12.** Пусть существует последовательность положительных чисел  $\{d_j\}$  такая, что существует положительное число  $\phi^* \leq \int_0^1 \theta(t) dt$ , где  $\phi \leq \alpha_i(t)$  и  $i = 1, 2, \dots, N + R$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Пусть также  $\lambda(t)$  и  $\mu(t)$  1-периодичны,  $\lambda_0(t) \leq M_1$  и

$$K = \sup_{|t-s| \leq 1} \int_s^t \phi(\tau) d\tau < \infty. \quad (4.2.17)$$

Тогда для любых начальных условий  $\mathbf{p}(0)$  и  $\bar{\mathbf{p}}(0)$  процессов  $X(t)$  и  $\bar{X}(t)$  соответственно справедливо неравенство для предельных режимов

$$\|\pi(t) - \bar{\pi}(t)\| \leq \frac{\varepsilon \left(1 + \ln \frac{2e^{2K} M_1}{d\phi^*}\right)}{\phi^*}, \quad (4.2.18)$$

$$|E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\mathbf{p}}(t)| \leq \frac{\varepsilon(N + R) \left(1 + \ln \frac{2e^{2K} M_1}{d\phi^*}\right)}{\phi^*}. \quad (4.2.19)$$

**Доказательство.** Используем оценку

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| &\leq 2\|\mathbf{z}^*(t) - \mathbf{z}^{**}(t)\|_1 \leq \frac{4}{d}\|\mathbf{z}^*(t) - \mathbf{z}^{**}(t)\|_{1D} \leq \\ &\leq \frac{4}{d} e^{-\int_0^t \phi(\tau) d\tau} \|\mathbf{z}^*(0) - \mathbf{z}^{**}(0)\|_{1D} \leq \frac{4}{d} e^{-\int_0^t \phi(\tau) d\tau} \|\mathbf{p}^*(0) - \mathbf{p}^{**}(0)\|_{1D}. \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

Выбираем теперь  $\mathbf{p}^*(0) = \pi(0)$ ,  $\mathbf{p}^{**}(0) = \mathbf{p}(0) = e_0$ . С учетом 1-периодичности  $\pi(t)$  имеем  $\|\pi(0)\|_{1D} \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\pi(t)\|_{1D}$  и

$$\begin{aligned} \|\pi(t)\|_{1D} &\leq \|V(t, 0)\pi(0)\|_{1D} + \left\| \int_0^t V(t, \tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau \right\|_{1D} \leq \\ &\leq e^K e^{-\phi^* t} \|\pi(0)\|_{1D} + M_1 \int_0^t e^{\int_\tau^t \phi(u) du} d\tau \leq e^K e^{-\phi^* t} \|\pi(0)\|_{1D} + M_1 e^K \int_0^t e^{-\phi^*(t-\tau)} d\tau, \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

где  $e^{-\int_0^t \phi(u) du} \leq e^K e^{-\phi^* t}$ .

Тогда

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\pi(t)\|_{1D} \leq \frac{M_1 e^K}{\phi^*}. \quad (4.2.22)$$

Тогда  $c = \frac{4e^{2K}M_1}{d\phi^*}$ ,  $b = \phi^*$ . Если выбрать  $\bar{p}(0) = \bar{\pi}(0)$ , то получим необходимое утверждение.

**Теорема 29.** Пусть существует последовательность положительных чисел  $\{d_j\}$  такая, что существует положительное число  $\phi^* \leq \int_0^1 \phi(t)dt$ , где  $\phi \leq \alpha_i(t)$  и  $i = 1, 2, \dots, N + R$ ,  $t \geq 0$ . Пусть также  $\lambda(t)$  и  $\mu(t)$  1-периодичны,  $\lambda_0(t) \leq M_1$  и

$$K = \sup_{|t-s| \leq 1} \int_s^t \phi(\tau) d\tau < \infty. \quad (4.2.23)$$

При совпадении начальных условий для исходного и возмущенного процессов для всех  $t \geq 0$  справедлива следующая оценка

$$|E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\mathbf{p}}(t)| \leq \frac{2e^K \varepsilon e^{(1+m)\frac{\varepsilon}{2}}}{W\phi^*} \left( (1+m) \frac{M_1 e^K}{2\phi^*} + \frac{d_1}{4} \right), \quad (4.2.24)$$

где  $W = \min_{i \geq 1} \frac{d_i}{i}$ ,  $m = \max_{|i-j|=1} \frac{d_i}{d_j}$ .

**Доказательство.** Аналогично перейдем к неоднородным процессам и перепишем систему для невозмущенного процесса в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \bar{B}(t)\mathbf{z}(t) + \bar{f}(t) + \hat{B}(t)\mathbf{z}(t) + \hat{f}(t), \quad (4.2.25)$$

где  $\hat{B}(t) = B(t) - \bar{B}(t)$ ,  $\hat{f}(t) = f(t) - \bar{f}(t)$ .

Тогда в любой норме при одинаковых начальных условиях справедлива оценка:

$$\|\mathbf{z}(t) - \bar{\mathbf{z}}(t)\| \leq \int_0^t \|\bar{V}(t, \tau)\| (\|\hat{B}(\tau)\| \|\mathbf{z}(\tau)\| + \|\hat{f}(\tau)\|) d\tau. \quad (4.2.26)$$

Оценим норму

$$\|\hat{B}(t)\|_{1D} = \|D\hat{B}(t)D^{-1}\|_1 \leq \max_n \left( \frac{\varepsilon}{4} \left( 1 + \frac{d_{n+1}}{d_n} \right) + \frac{\varepsilon}{4} \left( 1 + \frac{d_{n-1}}{d_n} \right) \right) = (1+m) \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.2.27)$$

А тогда, учитывая  $\gamma(B(t))_{1D} \leq -\phi(t)$ ,

$$\gamma(\bar{B}(t))_{1D} \leq \gamma(DB(t)D^{-1})_1 + \|\hat{B}(t)\|_{1D} \leq -\phi(t) + (1+m) \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.2.28)$$

С учетом 1-периодичности  $\mathbf{z}(t)$  и  $\pi(t)$  имеем  $\|\mathbf{z}(t)\|_{1D} \leq \|\pi(t)\|_{1D}$ .  
Учитывая  $\|\hat{f}(t)\|_{1D} = \frac{d_1\varepsilon}{4}$  и используя неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}\|_{1E} &= \sum_{k \geq 1} k|p_k| = \sum_{k \geq 1} \frac{k}{d_k} d_k |p_k| \leq W^{-1} \sum_{k \geq 1} d_k |p_k| = W^{-1} \sum_{k \geq 1} d_k \left| \sum_{i \geq n} p_i - \sum_{i \geq n-1} p_i \right| \leq \\ &\leq W^{-1} \sum_{k \geq 1} d_k \left( \left| \sum_{i \geq n} p_i \right| + \left| \sum_{i \geq n-1} p_i \right| \right) \leq \frac{2}{W} \sum_{k \geq 1} d_k \left| \sum_{i \geq n} p_i \right| \leq \frac{2}{W} \|\mathbf{z}\|_{1D}, \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

имеем

$$\begin{aligned} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\mathbf{p}}(t)| &\leq \|\mathbf{z}(t) - \bar{\mathbf{z}}(t)\|_{1E} \leq \frac{2}{W} \|\mathbf{z}(t) - \bar{\mathbf{z}}(t)\|_{1D} \leq \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{W} \left( (1+m) \frac{M_1 e^K}{2\phi^*} + \frac{d_1}{4} \right) \int_0^t e^{-\int_\tau^t (\phi(u) - (1+m)\frac{\varepsilon}{2}) du} d\tau \leq \\ &\leq \frac{2e^K \varepsilon e^{(1+m)\frac{\varepsilon}{2}}}{W\phi^*} \left( (1+m) \frac{M_1 e^K}{2\phi^*} + \frac{d_1}{4} \right). \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

### 4.3 Оценки скорости сходимости

В данном параграфе будут применены результаты §2 главы 3.

Имеем следующий процесс  $M_t/M_t/N/N+R$  со следующими выражениями:

$$\alpha_k(t) = \lambda(t) + (k+1)\mu(t) - \delta_{k+1}\lambda(t) - \delta_k^{-1}k\mu(t),$$

если  $0 \leq k \leq N-1$ , и

$$\alpha_k(t) = \lambda(t) + N\mu(t) - \delta_{k+1}\lambda(t) - \delta_k^{-1}N\mu(t)$$

если  $N \leq k < N+R$ .

Аналогично,

$$\zeta_k(t) = \lambda(t) + (k+1)\mu(t) + \delta_{k+1}\lambda(t) + \delta_k^{-1}k\mu(t)$$

если  $0 \leq k \leq N - 1$  и

$$\zeta_k(t) = \lambda(t) + N\mu(t) + \delta_{k+1}\lambda(t) + \delta_k^{-1}N\mu(t),$$

если  $N \leq k < N + R$ .

**Первый случай.** Пусть существует  $l > 1$  такое, что справедливо следующее предположение:

$$\int_0^\infty (N\mu(\tau) - l\lambda(\tau)) d\tau = +\infty. \quad (4.3.31)$$

Пусть  $\delta_k = 1$ ,  $k \leq N - 1$ , и  $\delta_k = l$ ,  $k \geq N$ .

Тогда

$$\alpha_k(t) = \begin{cases} \mu(t), & k < N - 1; \\ \mu(t) - (l - 1)\lambda(t), & k = N - 1; \\ \left(1 - \frac{1}{l}\right)(N\mu(t) - l\lambda(t)), & N \leq k \leq N + R - 2; \\ N\mu(t)\left(1 - \frac{1}{l}\right) + \lambda(t), & k = N + R - 1. \end{cases} \quad (4.3.32)$$

Пусть  $l \leq \frac{N}{N-1}$ , тогда получаем

$$\beta(t) = \min_k \alpha_k(t) = \left(1 - \frac{1}{l}\right)(N\mu(t) - l\lambda(t)), \quad (4.3.33)$$

$$\beta^*(t) = \max_k \alpha_k(t) = \mu(t), \quad (4.3.34)$$

и

$$\chi(t) = \max_k \zeta_k(t) \leq 2(l\lambda(t) + N\mu(t)). \quad (4.3.35)$$

**Теорема 30.** Пусть (4.3.31) выполнено. Тогда справедливы оценки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\theta} e^{-2 \int_s^t (l\lambda(\tau) + N\mu(\tau)) d\tau} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|_{1D} &\leq \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq \\ 4\theta e^{-\int_s^t \left(1 - \frac{1}{l}\right)(N\mu(\tau) - l\lambda(\tau)) d\tau} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|, \end{aligned} \quad (4.3.36)$$

для любых  $s \geq 0$ ,  $t \geq s$ ,  $\mathbf{p}^*(s) \in \Omega$ ,  $\mathbf{p}^{**}(s) \in \Omega$ , и если  $D(\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)) \leq \mathbf{0}$  (или  $D(\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)) \geq \mathbf{0}$ ). Тогда

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \geq \frac{1}{2\theta} e^{-\int_s^t \mu(u) du} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|_{1D} \quad (4.3.37)$$

для любых  $s \geq 0$ ,  $t \geq s$  и  $\theta = N - 1 + \sum_{i=1}^{R+1} l^i$ .

**Второй случай.** Пусть существует  $l < 1$  такое, что

$$\int_0^\infty (l\lambda(\tau) - N\mu(\tau)) d\tau = +\infty. \quad (4.3.38)$$

Пусть  $\delta_k = l$ ,  $k \geq 1$ . Тогда

$$\alpha_k(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{l} - 1\right)(l\lambda(t) - k\mu(t)) + \mu(t), & k \leq N - 1; \\ \left(\frac{1}{l} - 1\right)(l\lambda(t) - N\mu(t)), & N \leq k \leq N + R - 2; \\ \lambda(t) - N\left(\frac{1}{l} - 1\right)\mu(t), & k = N + R - 1 \end{cases} \quad (4.3.39)$$

и

$$\beta(t) = \min_k \alpha_k(t) = \left(\frac{1}{l} - 1\right)(l\lambda(t) - N\mu(t)), \quad (4.3.40)$$

$$\beta^*(t) = \max_k \alpha_k(t) \leq \lambda(t). \quad (4.3.41)$$

С другой стороны,

$$\chi^*(t) = \max_k \zeta_k(t) \leq 2 \left( \lambda(t) + \frac{N}{l} \mu(t) \right). \quad (4.3.42)$$

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 31.** Пусть (4.4.45) выполнено. Тогда справедливы оценки:

$$\begin{aligned} \frac{d}{4\theta} e^{-2 \int_s^t (l\lambda(\tau) + \frac{N}{l} \mu(\tau)) d\tau} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|_{1D} &\leq \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq \\ &\frac{4\theta}{d} e^{-\int_s^t (\frac{1}{l} - 1)(l\lambda(\tau) - N\mu(\tau)) d\tau} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|, \end{aligned} \quad (4.3.43)$$

для любых  $s \geq 0$ ,  $t \geq s$ ,  $\mathbf{p}^*(s) \in \Omega$ ,  $\mathbf{p}^{**}(s) \in \Omega$ , и если  $D(\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)) \leq \mathbf{0}$  (или  $D(\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)) \geq \mathbf{0}$ ). Тогда

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \geq \frac{d}{2\theta} e^{-\int_s^t \lambda(u) du} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|_{1D}. \quad (4.3.44)$$

для любых  $s \geq 0$ ,  $t \geq s$  и  $\theta \leq N + R$ ,  $d = l^{N+R}$ .

#### 4.4 Оценки устойчивости для системы $M_t/M_t/N/N + R$

Для модели обслуживания  $M_t/M_t/N/N + R$  имеем следующую последовательность:

$$\alpha_k(t) = \lambda(t) + k\mu(t) - \frac{d_{k+1}}{d_k} \lambda(t) - \frac{d_{k-1}}{d_k} (k-1)\mu(t),$$

если  $1 \leq k \leq N$ , и

$$\alpha_k(t) = \lambda(t) + N\mu(t) - \frac{d_{k+1}}{d_k} \lambda(t) - \frac{d_{k-1}}{d_k} N\mu(t),$$

если  $N < k \leq N + R$ .

**Первый случай.** Пусть при некотором  $l > 1$  и для любого  $t \geq 0$  выполняется условие

$$N\mu(t) - l\lambda(t) \geq \omega > 0. \quad (4.4.45)$$

Пусть  $d_1 = 1$ ,  $\frac{d_{k+1}}{d_k} = 1$ ,  $k \leq N - 2$ , и  $\frac{d_{k+1}}{d_k} = l$ ,  $k \geq N - 1$ .

Тогда

$$\alpha_k(t) = \begin{cases} \mu(t), & k < N - 1; \\ \mu(t) - (l - 1)\lambda(t), & k = N - 1; \\ (1 - \frac{1}{l})(N\mu(t) - l\lambda(t)), & N \leq k \leq N + R - 1; \\ N\mu(t)(1 - \frac{1}{l}) + \lambda(t), & k = N + R. \end{cases} \quad (4.4.46)$$

Пусть  $l \leq \frac{N}{N-1}$ , тогда получаем

$$\phi(t) = \min_k \alpha_k(t) = \left(1 - \frac{1}{l}\right) (N\mu(t) - l\lambda(t)), \quad (4.4.47)$$

**Теорема 32.** Пусть условие (4.4.45) выполняется, тогда в оценках устойчивости имеем  $\theta = (1 - \frac{1}{l})\omega$ ,  $d = 1$  и  $G = N - 1 + \sum_{i=1}^{R+1} l^i$ .

**Теорема 33.** Пусть интенсивности  $\lambda(t)$  и  $\mu(t)$  1-периодичны. Пусть существует  $\zeta$  такое, что

$$\int_0^1 (N\mu(t) - l\lambda(t)) dt \geq \zeta > 0.$$

Пусть также

$$K = \sup_{|t-s| \leq 1} \int_s^t \theta(\tau) d\tau < \infty. \quad (4.4.48)$$

Тогда для любых начальных условий  $\mathbf{p}(0)$  и  $\bar{\mathbf{p}}(0)$  процессов  $X(t)$  и  $\bar{X}(t)$  соответственно справедливы следующие оценки

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{\varepsilon (1 + \ln 4Ge^K)}{(1 - \frac{1}{l}) \zeta}, \quad (4.4.49)$$

и

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)| \leq \frac{(N + R)\varepsilon (1 + \ln 4Ge^K)}{(1 - \frac{1}{l}) \zeta}, \quad (4.4.50)$$

где  $G = N - 1 + \sum_{i=1}^{R+1} l^i$ .

Пусть для построенной последовательности существует  $l \geq \frac{N}{N-1}$  такое, что

$$\min_k \alpha_k = \mu(t). \quad (4.4.51)$$

**Теорема 34.** Пусть  $\lambda(t)$  и  $\mu(t)$  1-периодичны,  $\lambda(t) \leq M_1$  почти при всех  $t \in [0, 1]$ . Пусть существует положительное число  $l$  такое, что

$$\int_0^1 \mu(t) dt \geq \psi > 0.$$

Пусть также

$$K = \sup_{|t-s| \leq 1} \int_s^t \mu(\tau) d\tau < \infty. \quad (4.4.52)$$

Тогда для любых начальных условий  $\mathbf{p}(0)$  и  $\bar{\mathbf{p}}(0)$  процессов  $X(t)$  и  $\bar{X}(t)$  соответственно справедливы следующие оценки

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\pi(t) - \bar{\pi}(t)\| \leq \frac{\varepsilon \left(1 + \ln \frac{2e^{2K} M_1}{\psi}\right)}{\psi}, \quad (4.4.53)$$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\mathbf{p}}(t)| \leq \frac{2(N-1)e^K \varepsilon e^{(1+l)\frac{\varepsilon}{2}}}{\psi} \left( (1+l) \frac{M_1 e^K}{2\psi} + \frac{1}{4} \right) \quad (4.4.54)$$

**Доказательство.** Будем доказывать первую оценку, опираясь на оценки следствия 11. В данном случае  $\phi^* = \psi$ ,  $d = 1$ . Вторая оценка следует из теоремы 29. Вместо  $\phi^* = \psi$ ,  $d = 1$ ,  $W = \frac{1}{N-1}$ ,  $m = l$ .

**Второй случай.** Пусть при некотором  $l < 1$  выполняется условие

$$l\lambda(t) - N\mu(t) \geq \omega > 0. \quad (4.4.55)$$

Положим  $\frac{d_{k+1}}{d_k} = l$ ,  $k \geq 1$ . Тогда

$$\alpha_k(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{l} - 1\right) (l\lambda(t) - k\mu(t)) + \mu(t), & k \leq N-1; \\ \left(\frac{1}{l} - 1\right) (l\lambda(t) - N\mu(t)), & N \leq k \leq N+R-1; \\ \lambda(t) - N\left(\frac{1}{l} - 1\right) \mu(t), & k = N+R \end{cases} \quad (4.4.56)$$

и

$$\phi(t) = \min_k \alpha_k(t) = \left(\frac{1}{l} - 1\right) (l\lambda(t) - N\mu(t)). \quad (4.4.57)$$

**Теорема 35.** Пусть условие (4.4.55) выполняется, тогда в оценках устойчивости имеем  $\theta = \left(\frac{1}{l} - 1\right)\omega$ ,  $d = l^{N+R}$  и  $G < N+R$ .

**Теорема 36.** Пусть интенсивности  $\lambda(t)$  и  $\mu(t)$  1-периодичны. Пусть существует положительное число  $\zeta$  такое, что

$$\int_0^1 (l\lambda(t) - N\mu(t)) dt \geq \zeta > 0.$$

Тогда для любых начальных условий  $\mathbf{p}(0)$  и  $\bar{\mathbf{p}}(0)$  процессов  $X(t)$  и  $\bar{X}(t)$  соответственно справедливы следующие оценки

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{\varepsilon \left(1 + \ln \frac{4e^K(N+R)}{l^{N+R}}\right)}{\left(\frac{1}{l} - 1\right) \zeta}, \quad (4.4.58)$$

и

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}}(t)| \leq \frac{(N+R)\varepsilon \left(1 + \ln \frac{4e^K(N+R)}{l^{N+R}}\right)}{\left(\frac{1}{l} - 1\right) \zeta}. \quad (4.4.59)$$

## 4.5 Примеры

**Пример 12.** Пусть  $\lambda(t) = 9 + \sin 2\pi t$ ,  $\mu(t) = 1 + \cos 2\pi t$ ,  $N = 100$ ,  $R = 10^5$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

Выполняется условие теоремы при  $l = 2$ . Тогда  $M_1 = 10$ ,  $K = 1 + \frac{1}{\pi}$ ,  $\psi = 1$ .

Тогда

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq 6.632 \cdot 10^{-6},$$

и

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}(t)} - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq 0.042.$$

Построим предельные характеристики данного процесса, используя метод усечений. Рассмотрим семейство «усеченных» процессов  $X_m(t)$ ,  $m > N$ , с фазовыми пространствами  $E_m = \{0, 1, \dots, m\}$ , теми же интенсивностями при  $k \leq m$  и матрицами интенсивностей  $A_m(t)$ . Будем отождествлять векторы

$(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)^T$  и  $(x_1, \dots, x_m)^T$ . Рассмотрим прямую систему Колмогорова для исходного процесса в следующей форме:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{A}_m(t)\mathbf{p} + (\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}_m(t))\mathbf{p}, \quad (4.5.60)$$

а также соответствующую систему

$$\frac{d\mathbf{p}_m}{dt} = \mathbf{A}_m(t)\mathbf{p}_m \quad (4.5.61)$$

для усеченного процесса.

Имеем

$$\mathbf{p}_m(t) = U_m(t)\mathbf{p}(0) \quad (4.5.62)$$

при  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_m(0)$  и

$$\mathbf{p}(t) = U_m(t)\mathbf{p}(0) + \int_0^t U_m(t, \tau) (\mathbf{A}(\tau) - \mathbf{A}_m(\tau))\mathbf{p}(\tau) d\tau. \quad (4.5.63)$$

Тогда (в любой норме) получаем

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_m(t)\| = \left\| \int_0^t U_m(t, \tau) (\mathbf{A}(\tau) - \mathbf{A}_m(\tau))\mathbf{p}(\tau) d\tau \right\|. \quad (4.5.64)$$

Рассмотрим матрицу Коши

$$U_m = \begin{pmatrix} u_{00}^m & . & . & u_{0m}^m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ u_{10}^m & . & . & u_{1m}^m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ u_{m0}^m & . & . & u_{mm}^m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & . & . & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & \dots & & & & & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.5.65)$$

Тогда

$$(\mathbf{A} - \mathbf{A}_m)\mathbf{p} =$$

$$= (0, \dots, -\lambda p_m + N\mu p_{m+1}, \lambda p_m - (\lambda + N\mu) p_{m+1} + N\mu p_{m+2}, \dots, \lambda p_{N+R-1} - N\mu p_{N+R})^T$$

и, следовательно,

$$U_m (\mathbf{A} - \mathbf{A}_m) \mathbf{p} = \begin{pmatrix} u_{0m}^m (-\lambda p_m + N\mu p_{m+1}) \\ u_{1m}^m (-\lambda p_m + N\mu p_{m+1}) \\ \vdots \\ u_{mm}^m (-\lambda p_m + N\mu p_{m+1}) \\ \lambda p_m - (\lambda + N\mu) p_{m+1} + N\mu p_{m+2} \\ \vdots \\ \lambda p_{N+R-1} - N\mu p_{N+R} \end{pmatrix}. \quad (4.5.66)$$

С учетом неравенств  $u_{ij}^m(t, \tau) \geq 0$  (при всех  $i, j, t, \tau$ ) и равенств  $\sum_i u_{ij}^m(t, \tau) = 1$  (при всех  $j, t, \tau$ ) получаем оценку

$$\begin{aligned} \|U_m (\mathbf{A} - \mathbf{A}_m) \mathbf{p}\| &= |-\lambda p_m + N\mu p_{m+1}| \sum_{k \leq m} u_{km}^m + \\ &\sum_{k=m}^{N+R-2} |\lambda p_k - (\lambda + N\mu) p_{k+1} + N\mu p_{k+2}| + |\lambda p_{N+R-1} - N\mu p_{N+R}| \leq \\ &\leq 2(M_1 + NM_2) \sum_{k \geq m} p_k \leq \frac{2(M_1 + NM_2)}{m} \sum_{k \geq m} kp_k \quad (4.5.67) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \|U_m (\mathbf{A} - \mathbf{A}_m) \mathbf{p}\|_{1E} &= |-\lambda p_m + N\mu p_{m+1}| \sum_{k \leq m} k u_{km}^m + \\ &\sum_{k=m}^{N+R-2} (k+1) |\lambda p_k - (\lambda + N\mu) p_{k+1} + N\mu p_{k+2}| + (N+R) |\lambda p_{N+R-1} - N\mu p_{N+R}| \leq \\ &\leq (M_1 + NM_2) \sum_{k \geq m} (2k+1) p_k \leq \frac{2(m+1)(M_1 + NM_2)}{m} \sum_{k \geq m} kp_k \quad (4.5.68) \end{aligned}$$

Оценим  $\sum_{k \geq m} kp_k$

$$d_{m-1}(p_m + p_{m+1} + \dots) + d_m(p_{m+1} + p_{m+2} + \dots) + \dots =$$

$$\begin{aligned}
&= p_m d_{m-1} + p_{m+1}(d_{m-1} + d_m) + \dots = \\
&= \frac{d_{m-1}}{m} m p_m + \frac{d_{m-1} + d_m}{m+1} p_{m+1} + \dots \geq W_m \sum_{k \geq m} k p_k.
\end{aligned} \tag{4.5.69}$$

Учитывая (4.2.22), получаем

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_m(t)\| \leq \frac{2M_1 e^K t (M_1 + N M_2)}{m W_m \theta^*}, \tag{4.5.70}$$

$$|E_{\mathbf{p}}(t) - E_{\mathbf{p}_m}(t)| \leq \frac{2M_1 e^K t (m+1) (M_1 + N M_2)}{m W_m \theta^*}. \tag{4.5.71}$$

Построим предельные характеристики при  $m = 146$  и  $t \in [21, 22]$ .

**Пример 13.** Пусть  $\lambda(t) = 250 + 200 \sin 2\pi t$ ,  $\mu(t) = 1 + \cos 2\pi t$ ,  $N = 100$ ,  $R = 10^4$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

Условие теоремы выполняется при  $l = \frac{1}{2}$ . Имеем  $\int_0^1 (l\lambda(t) - N\mu(t)) dt = 25$ ,  $M_1 = 450$ ,  $K = 100 + \frac{101}{\pi}$ ,  $\psi = 1$ .

Тогда

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq 2.807 \cdot 10^{-4},$$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}(t)} - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq 2.836.$$

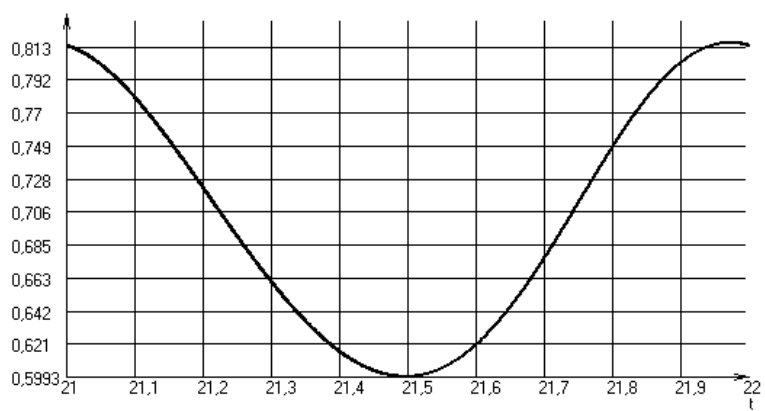


Рис. 4.1: Приближенное значение предельной величины  $\bar{J}_0(t) = \Pr(\bar{X}(t) = 0)$  (пример 12)

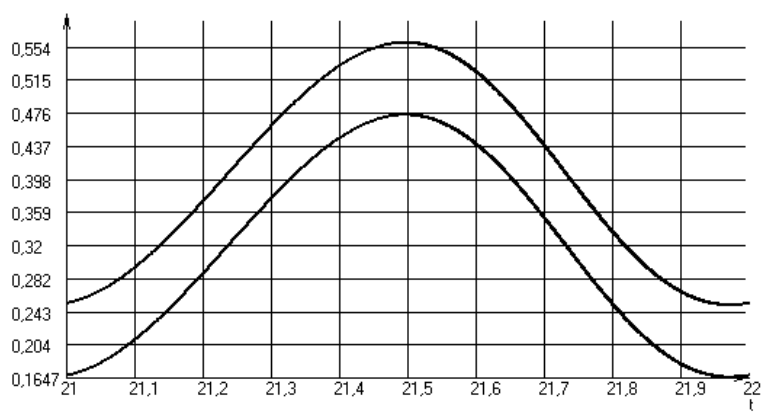


Рис. 4.2: Приближенное значение предельного среднего для возмущенного процесса  $\bar{E}_{\mathbf{P}}(t)$  (пример 12)

## Глава 5

# СМО с групповым поступлением и обслуживанием требований

Здесь рассмотрена система массового обслуживания, число требований в которой описывается нестационарной марковской цепью с непрерывным временем, причем требования могут поступать и обслуживаться группами.

### 5.1 Введение

Пусть  $X = X(t)$ ,  $t \geq 0$ , - число требований в системе обслуживания.

Обозначим через  $p_{ij}(s, t) = Pr \{X(t) = j | X(s) = i\}$ ,  $i, j \geq 0$ ,  $0 \leq s \leq t$ , переходные вероятности процесса  $X = X(t)$ , а через  $p_i(t) = Pr \{X(t) = i\}$  - его вероятности состояний.

Будем предполагать, что интенсивности поступления и обслуживания  $k$  требований в момент  $t$  в системе обслуживания ( $\lambda_k(t)$  и  $\mu_k(t)$  соответственно) не зависят от числа требований, находящихся в системе в момент  $t$ , являются локально интегрируемыми на  $[0, \infty)$  функциями времени  $t$ , и кроме того,  $\lambda_{k+1}(t) \leq \lambda_k(t)$  и  $\mu_{k+1}(t) \leq \mu_k(t)$  при всех  $k$  и почти при всех  $t \geq 0$ . Введем обозначения

$$L_\lambda(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(t), \quad L_\mu(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(t), \quad L = L_\lambda + L_\mu, \quad L_b(t) = \sum_{i=1}^N \mu_i(t) \quad (5.1.1)$$

Тогда для описания вероятностной динамики процесса получаем прямую систему Колмогорова в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A(t)\mathbf{p}(t), \quad (5.1.2)$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{00}(t) & \mu_1(t) & \mu_2(t) & \mu_3(t) & \cdots \\ \lambda_1(t) & a_{11}(t) & \mu_1(t) & \mu_2(t) & \cdots \\ \lambda_2(t) & \lambda_1(t) & a_{22}(t) & \mu_1(t) & \cdots \\ \lambda_3(t) & \lambda_2(t) & \lambda_1(t) & a_{33}(t) & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (5.1.3)$$

причем  $a_{ii}(t) = -\sum_{k=1}^i \mu_k(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(t)$ .

Имеем  $\|A(t)\| \leq 2L$  при всех  $t \geq 0$ .

Через  $E(t, k) = E\{X(t) | X(0) = k\}$  будем далее обозначать математическое ожидание процесса (среднее число требований) в момент  $t$  при условии, что в нулевой момент времени он находится в состоянии  $k$ , а через  $E_{\mathbf{p}}(t)$  обозначим математическое ожидание процесса в момент  $t$  при начальном распределении вероятностей состояний  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}$ .

## 5.2 Конечные системы

Преобразуем исходное уравнение в неоднородное

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = B(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}(t), \quad (5.2.4)$$

где  $\mathbf{f}(t) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)^T$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_1 & \mu_1 - \lambda_1 & \mu_2 - \lambda_1 & \mu_3 - \lambda_1 & \cdots & \cdots & \mu_{r-1} - \lambda_1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & a_{22} - \lambda_2 & \mu_1 - \lambda_2 & \mu_2 - \lambda_2 & \cdots & \cdots & \mu_{r-2} - \lambda_2 \\ \lambda_2 - \lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_3 & a_{33} - \lambda_3 & \mu_1 - \lambda_2 & \cdots & \cdots & \mu_{r-3} - \lambda_3 \\ \cdots & & & & & & \\ \lambda_{r-1} - \lambda_r & \lambda_{r-2} - \lambda_r & \cdots & \cdots & \lambda_2 - \lambda_r & \lambda_1 - \lambda_r & a_{rr} - \lambda_r \end{pmatrix} \quad (5.2.5)$$

### 5.2.1 Скорость сходимости

Пусть количество состояний системы равно  $r$ .

Рассмотрим пространство последовательностей  $l_D = \{\mathbf{z} = (p_1, p_2, \dots, p_r)\}$  таких, что  $\|\mathbf{z}\|_D = \|D\mathbf{z}\|_1 < \infty$ , где

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & d_1 & d_1 & \cdots & d_1 \\ 0 & d_2 & d_2 & \cdots & d_2 \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_r \end{pmatrix} \quad (5.2.6)$$

Получим

$$D\mathbf{B}(t)D^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_r & (\mu_1 - \mu_2)\frac{d_1}{d_2} & (\mu_2 - \mu_3)\frac{d_1}{d_3} & \cdots & (\mu_{r-1} - \mu_r)\frac{d_1}{d_r} \\ (\lambda_1 - \lambda_r)\frac{d_2}{d_1} & a_{22} - \lambda_{r-1} & (\mu_1 - \mu_3)\frac{d_2}{d_3} & \cdots & (\mu_{r-2} - \mu_r)\frac{d_2}{d_r} \\ (\lambda_2 - \lambda_r)\frac{d_3}{d_1} & (\lambda_1 - \lambda_{r-1})\frac{d_3}{d_2} & a_{33} - \lambda_{r-2} & \cdots & (\mu_{r-3} - \mu_r)\frac{d_3}{d_r} \\ \cdots & & & & \\ (\lambda_{r-1} - \lambda_r)\frac{d_r}{d_1} & (\lambda_{r-2} - \lambda_{r-1})\frac{d_r}{d_2} & (\lambda_{r-3} - \lambda_{r-2})\frac{d_r}{d_3} & \cdots & a_{rr} - \lambda_1 \end{pmatrix} \quad (5.2.7)$$

Введем

$$\alpha(t) = \min_{1 \leq i \leq r} (-a_{ii}(t) + \lambda_{r-i+1}(t) - \sum_{k=1}^{i-1} (\mu_{i-k}(t) - \mu_i(t))\frac{d_k}{d_i} - \sum_{k=1}^{r-i} (\lambda_k(t) - \lambda_{i+r-1}(t))\frac{d_{k+i}}{d_i})$$

Пусть  $d = \min_{1 \leq i \leq r} d_i$ ,  $G = \sum_{i=1}^r d_i$ ,  $W = \min_k \frac{\sum_{i=1}^k d_i}{k}$ .

**Теорема 37.** Пусть существует последовательность положительных чисел  $\{d_j\}$  такая, что  $\int_0^\infty \alpha(\tau) d\tau = +\infty$ . Тогда при любых начальных условиях  $\mathbf{p}^*(s), \mathbf{p}^{**}(s)$  и любых  $s, t$ ,  $0 \leq s \leq t$  справедливы следующие оценки

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq \frac{8G}{d} e^{-\int_s^t \alpha(u) du}, \quad (5.2.8)$$

$$|E(t, s) - \phi(t)| \leq \frac{4G}{W} e^{-\int_s^t \alpha(u) du}. \quad (5.2.9)$$

**Доказательство.** Рассмотрим уравнение (5.1.2). Учитывая оценки для сравнения норм, имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| &\leq 2\|\mathbf{z}^*(t) - \mathbf{z}^{**}(t)\| \leq \frac{4}{d} \|\mathbf{z}^*(t) - \mathbf{z}^{**}(t)\|_{1D} \leq \\ &\leq \frac{4}{d} e^{-\int_s^t \alpha(u) du} \|\mathbf{z}^*(s) - \mathbf{z}^{**}(s)\|_{1D} \leq \frac{4G}{d} e^{-\int_s^t \alpha(u) du} \|\mathbf{z}^*(s) - \mathbf{z}^{**}(s)\| \leq \\ &\leq \frac{4G}{d} e^{-\int_s^t \alpha(u) du} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\| \leq \frac{8G}{d} e^{-\int_s^t \alpha(u) du} \end{aligned}$$

для любых начальных условий  $\mathbf{p}^*(s), \mathbf{p}^{**}(s)$  и любых  $s, t$ ,  $0 \leq s \leq t$ .

Тогда

$$|E(t, k) - \phi(t)| \leq \frac{2}{W} \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_{1D} = \frac{2}{W} e^{-\int_0^t \alpha(u) du} \|\mathbf{e}_k - \mathbf{p}^{**}(0)\|_{1D} \leq \frac{4G}{W} e^{-\int_0^t \alpha(u) du} \quad (5.2.10)$$

Введем

$$\chi(t) = \min_{1 \leq i \leq r} (-a_{ii}(t) + \lambda_{r-i+1}(t) + \sum_{k=1}^{i-1} (\mu_{i-k}(t) - \mu_i(t)) \frac{d_k}{d_i} + \sum_{k=1}^{r-i} (\lambda_k(t) - \lambda_{i+r-1}(t)) \frac{d_{k+i}}{d_i})$$

и

$$\chi(t) = \max_{1 \leq i \leq r} \zeta_i(t).$$

**Замечание 10.** Пусть выполнены условия теоремы, тогда справедливы следующие оценки

$$\frac{d}{4G} e^{-\int_s^t \chi(u) du} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\| \leq \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq \frac{4G}{d} e^{-\int_s^t \alpha(u) du} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|. \quad (5.2.11)$$

**Следствие 13.** Пусть выполняются условия теоремы, но  $\alpha(t) \geq \alpha > 0$  почти при всех  $t \geq 0$ . Тогда справедливы следующие оценки

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq \frac{8G}{d} e^{-\alpha(t-s)}, \quad (5.2.12)$$

$$|E(t, s) - \phi(t)| \leq \frac{4G}{W} e^{-\alpha(t-s)}. \quad (5.2.13)$$

Обозначим  $\alpha^* = \int_0^1 \alpha(t) dt$ ,  $M_0 = \max_{|t-s| \leq 1} \int_s^t \alpha(u) du$ ,  $M = e^{M_0 + \alpha^*}$ . Имеем

$$e^{-\int_s^t \alpha(u) du} \leq M e^{-\alpha^*(t-s)}. \quad (5.2.14)$$

**Следствие 14.** Пусть  $\lambda_k(t)$  и  $\mu_k(t)$  1-периодичны и выполняются условия теоремы, причем  $\alpha^* > 0$ . Тогда предельный режим (скажем,  $\mathbf{p}^*(t)$ ) и соответствующее ему предельное среднее  $\phi^*(t)$  можно выбрать 1-периодическими, тогда справедливы следующие оценки

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq \frac{8GM}{d} e^{-\alpha^*(t-s)}, \quad (5.2.15)$$

$$|E(t, s) - \phi(t)| \leq \frac{4GM}{W} e^{-\alpha^*(t-s)}. \quad (5.2.16)$$

**Следствие 15.** Пусть  $\lambda_n(t)$  и  $\mu_n(t)$  1-периодичны и выполняются условия следствия теоремы, причем существует положительное число  $\alpha^* = \int_0^1 \alpha(t) dt$ . Если в качестве предельного режима выбрать  $\pi(t)$ , тогда при  $X(0) = 0$  и любых  $s, t$ ,  $0 \leq s \leq t$  справедливы следующие оценки

$$\|\mathbf{p}(t) - \pi(t)\| \leq \frac{4KM^2}{d\alpha^*} e^{-\alpha^*t}, \quad (5.2.17)$$

$$|E(t, 0) - \phi(t)| \leq \frac{KM^2}{W\alpha^*} e^{-\alpha^*t}. \quad (5.2.18)$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| &\leq \frac{4}{d} \|\mathbf{z}^*(t) - \mathbf{z}^{**}(t)\|_{1D} \leq \\ &\leq \frac{4}{d} e^{-\int_0^t \alpha(u) du} \|\mathbf{z}^*(0) - \mathbf{z}^{**}(0)\|_{1D} \leq \frac{4}{d} e^{-\int_0^t \alpha(u) du} \|\mathbf{p}^*(0) - \mathbf{p}^{**}(0)\|_{1D}. \end{aligned}$$

Выбираем теперь  $\mathbf{p}^*(0) = \pi(0)$ ,  $\mathbf{p}^{**}(0) = \mathbf{p}(0) = e_0$ . С учетом 1-периодичности  $\pi(t)$  имеем  $\|\pi(0)\|_{1D} \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\pi(t)\|_{1D}$  и

$$\begin{aligned} \|\pi(t)\|_{1D} &\leq \|U(t, 0)\pi(0)\|_{1D} + \left\| \int_0^t U(t, \tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau \right\|_{1D} \leq \\ &\leq M e^{-\alpha^* t} \|\pi(0)\|_{1D} + K \int_0^t e^{\int_\tau^t \alpha(u) du} d\tau \leq M e^{-\alpha^* t} \|\pi(0)\|_{1D} + KM \int_0^t e^{-\alpha^*(t-\tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

Тогда

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\pi(t)\|_{1D} \leq \frac{KM}{\alpha^*}. \quad (5.2.20)$$

### 5.2.2 Устойчивость

Рассмотрим теперь «возмущенный» процесс  $\bar{X} = \bar{X}(t)$ ,  $t \geq 0$ , обозначая его характеристики с чертой. Для простоты записи оценок будем предполагать, что возмущения «равномерно малы», то есть выполняется неравенство  $\|\mathbf{A}(t) - \bar{\mathbf{A}}(t)\| \leq \varepsilon$ .

**Теорема 38.** Пусть  $\lambda_n(t)$  и  $\mu_n(t)$  1-периодичны. Для любых начальных условий  $\mathbf{p}(s)$  и  $\bar{\mathbf{p}}(s)$  процессов  $X(t)$  и  $\bar{X}(t)$  соответственно справедливы неравенства

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{\varepsilon(1 + \ln \frac{4GM}{d})}{\alpha^*}, \quad (5.2.21)$$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq \frac{r\varepsilon(1 + \ln \frac{4GM}{d})}{\alpha^*}. \quad (5.2.22)$$

**Доказательство.**

По теореме 8

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \begin{cases} \|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\| + (t-s)\varepsilon, & 0 < t < b^{-1} \ln \frac{c}{2}, \\ b^{-1}(\ln \frac{c}{2} + 1 - \frac{c}{2}e^{-b(t-s)})\varepsilon + \frac{c}{2}e^{-b(t-s)}\|\mathbf{p}(s) - \bar{\mathbf{p}}(s)\|, & t \geq b^{-1} \ln \frac{c}{2} \end{cases} \quad (5.2.23)$$

для любых начальных условий  $\mathbf{p}(s)$  и  $\bar{\mathbf{p}}(s)$ . Из (5.2.15)  $c = \frac{8GM}{d}$ ,  $b = \alpha^*$ .

Устремив  $t \rightarrow \infty$  и взяв  $s = 0$ , получаем нужное утверждение.

**Теорема 39.** Пусть  $\alpha(t) \geq \alpha > 0$ . Для любых начальных условий  $\mathbf{p}(s)$  и  $\bar{\mathbf{p}}(s)$  процессов  $X(t)$  и  $\bar{X}(t)$  соответственно справедливы неравенства

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{\varepsilon(1 + \ln \frac{4G}{d})}{\alpha}, \quad (5.2.24)$$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq \frac{r\varepsilon(1 + \ln \frac{4G}{d})}{\alpha}. \quad (5.2.25)$$

**Теорема 40.** Пусть  $\lambda_n(t)$  и  $\mu_n(t)$  1-периодичны. Для любых начальных условий  $\mathbf{p}(s)$  и  $\bar{\mathbf{p}}(s)$  процессов  $X(t)$  и  $\bar{X}(t)$  соответственно справедливы неравенства

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{\varepsilon(1 + \ln \frac{2KM^2}{d\alpha^*})}{\alpha^*}, \quad (5.2.26)$$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq \frac{r\varepsilon(\alpha^* + \ln \frac{2KM^2}{d\alpha^*})}{\alpha^*}. \quad (5.2.27)$$

**Доказательство.** Из (5.2.17) получаем  $c = \frac{4KM^2}{d\alpha^*}$ ,  $b = \alpha^*$ .

Пусть

$$e^{-\int_s^t \alpha(u) du} \geq N e^{-a(t-s)},$$

$S = \max_{1 \leq i, j \leq r} \frac{d_i}{d_j}$  и  $K, L$  таковы, что

$$d_1 \lambda_1(t) + (d_1 + d_2) \lambda_2(t) + \dots + (\sum_{1 \leq i \leq r} d_i) \lambda_r(t) \leq K,$$

$$d_1(\lambda_1(t) - \bar{\lambda}_1(t)) + (d_1 + d_2)(\lambda_2(t) - \bar{\lambda}_2(t)) + \dots + (\sum_{1 \leq i \leq r} d_i)(\lambda_r(t) - \bar{\lambda}_r(t)) \leq L\varepsilon.$$

**Теорема 41** Пусть при всех  $k$  и почти при всех  $t \geq 0$ ,  $\lambda_k(t) < \infty$ . Для любых начальных условий  $\mathbf{p}(s)$  и  $\bar{\mathbf{p}}(s)$  процессов  $X(t)$  и  $\bar{X}(t)$  соответственно справедливо

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq \frac{\varepsilon N(La + 2SKN)}{Wa(a - 2\varepsilon S)}. \quad (5.2.28)$$

**Доказательство.** Перепишем исходную систему (5.1.2) для невозмущенного процесса в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \bar{\mathbf{B}}(t)\mathbf{p}(t) + \mathbf{f}(t) + (\mathbf{B}(t) - \bar{\mathbf{B}}(t))\mathbf{p}(t) \quad (5.2.29)$$

Тогда

$$\mathbf{p}(t) = \bar{U}(t, 0)\mathbf{p}(0) + \int_0^t \bar{U}(t, \tau)\mathbf{f}(\tau) d\tau + \int_0^t \bar{U}(t, \tau) \hat{\mathbf{B}}(\tau)\mathbf{p}(\tau) d\tau, \quad (5.2.30)$$

и

$$\bar{\mathbf{p}}(t) = \bar{U}(t, 0)\bar{\mathbf{p}}(0) + \int_0^t \bar{U}(t, \tau)\mathbf{f}(\tau) d\tau. \quad (5.2.31)$$

А тогда в любой норме при одинаковых начальных условиях справедлива оценка:

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \int_0^t \|\bar{U}(t, \tau)\| (\|\mathbf{B}(\tau) - \bar{\mathbf{B}}(\tau)\| \|\mathbf{p}(\tau)\| + \|\mathbf{f}(\tau) - \bar{\mathbf{f}}(\tau)\|) d\tau. \quad (5.2.32)$$

Далее,

$$\|\mathbf{B}(t) - \bar{\mathbf{B}}(t)\|_{1D} = \|D(\mathbf{B}(t) - \bar{\mathbf{B}}(t))D^{-1}\| \leq 2\varepsilon S. \quad (5.2.33)$$

А тогда

$$\gamma(\bar{\mathbf{B}}(t))_{1D} \leq \gamma(D\mathbf{B}(t)D^{-1}) + \|\mathbf{B}(t) - \bar{\mathbf{B}}(t)\|_{1D} \leq -\alpha(t) + 2\varepsilon S. \quad (5.2.34)$$

Оценим теперь

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}(t)\|_{1D} &\leq \|U(t)\mathbf{p}(0)\|_{1D} + \int_0^t \|U(t, \tau)\mathbf{f}(\tau)\|_{1D} d\tau \leq \\ &\leq Ne^{-at}\|\mathbf{p}(0)\|_{1D} + \frac{KN}{a}. \end{aligned} \quad (5.2.35)$$

Легко видеть, что  $\|\mathbf{f}(\tau) - \bar{\mathbf{f}}(\tau)\|_{1D} \leq L\varepsilon$ ,  $\|\mathbf{f}(t)\|_{1D} \geq K$ . Тогда с учетом (5.3.151)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\|_{1D} &\leq N \int_0^t e^{-(a-2\varepsilon S)(t-\tau)} \left( 2\varepsilon S(Ne^{-a\tau}\|\mathbf{p}(0)\|_{1D} + \frac{KN}{a}) + L\varepsilon \right) d\tau \\ &\leq o(1) + \frac{N\varepsilon(L + \frac{2SKN}{a})}{a - 2\varepsilon S}. \end{aligned} \quad (5.2.36)$$

### 5.2.3 Примеры

**Пример 14.** Рассмотрим здесь простейшую систему обслуживания с групповым поступлением и обслуживанием требований с катастрофами. Будем предполагать, что требования поступают группами не более трех одновременно с одинаковыми интенсивностями

$$\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = \lambda_3(t) = 3 + \sin 2\pi t$$

, одновременно обслуживается одно или два требования также с одинаковыми интенсивностями

$$\mu_1(t) = \mu_2(t) = 2 + \cos 2\pi t$$

.

$$\lambda_4(t) = \dots = \lambda_r(t) = \mu_3(t) = \dots = \mu_r(t) = 0$$

Выберем последовательность  $d_k$  так, что  $d_k = h^k$ , где  $h < 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} d &= h^r, G = \frac{h}{1-h}, W = \frac{h^r}{r}, S = \frac{1}{h^2}, K = 4 \cdot (3h + 2h^2 + h^3), L = 3h + 2h^2 + h^3, \\ \alpha(t) &= \lambda(t) - \mu(t)\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h} - 2\right), \alpha = \min \alpha(t) > 0, \alpha^* = 7 - \frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}, M_0 = \\ &7 - \frac{2}{h^2} - \frac{2}{h} + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h} - 1 \right), M = e^{\alpha^* + M_0}. \end{aligned}$$

по следствию 14

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq \frac{8e^{-\alpha t}}{h^{r-1}(1-h)}, \quad (5.2.37)$$

$$|E_{\mathbf{p}}(t) - \phi(t)| \leq \frac{4re^{-\alpha t}}{h^{r-1}(1-h)}. \quad (5.2.38)$$

по следствию 15

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*(t)\| \leq \frac{8e^{(-7+\frac{2}{h^2}+\frac{2}{h})t}}{h^{r-1}(1-h)}, \quad (5.2.39)$$

$$|E_{\mathbf{p}}(t) - \phi^*(t)| \leq \frac{4Mre^{(-7+\frac{2}{h^2}+\frac{2}{h})t}}{h^{r-1}(1-h)}. \quad (5.2.40)$$

по теореме 38 ( $N = 1$ ,  $a = \alpha$ ) - использование следствия 14:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{\varepsilon(1 + \ln \frac{4}{h^{r-1}(1-h)})}{\alpha}, \quad (5.2.41)$$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq \frac{r\varepsilon(1 + \ln \frac{4}{h^{r-1}(1-h)})}{\alpha}. \quad (5.2.42)$$

по теореме 38 ( $N = M$ ,  $a = \alpha^*$ ) - использование следствия 15:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{\varepsilon(1 + \ln \frac{4M}{h^{r-1}(1-h)})}{7 - \frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}}, \quad (5.2.43)$$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq \frac{r\varepsilon(1 + \ln \frac{4M}{h^{r-1}(1-h)})}{7 - \frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}}. \quad (5.2.44)$$

по теореме 48 - использование следствия 14:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq \frac{r\varepsilon(3h + 2h^2 + h^3)(\alpha h^2 + 8)}{h^r \alpha (\alpha h^2 - 2\varepsilon)}. \quad (5.2.45)$$

по теореме 48 - использование следствия 15:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq \frac{rM\varepsilon(3h + 2h^2 + h^3)(\alpha^* h^2 + 8M)}{h^r \alpha^* (\alpha^* h^2 - 2\varepsilon)}. \quad (5.2.46)$$

**Пример 15.** Рассмотрим процесс с интенсивностями

$$\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = \dots = \lambda_r(t) = 3 + \sin 2\pi t$$

$$\mu_1(t) = \mu_2(t) = 2 + \cos 2\pi t$$

$$\mu_3(t) = \dots = \mu_r(t) = 0$$

Выберем последовательность  $d_k$  так, что  $d_k = 1$ .  $d = 1$ ,  $G = r$ ,  $W = \frac{1}{r}$ ,  $S = 1$ ,  $K = \frac{4r(1+r)}{2}$ ,  $L = \frac{r(1+r)}{2}$ ,  $\alpha(t) = \lambda(t)$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\alpha^* = 3$ ,  $M_0 = 3 + \frac{1}{\pi}$ ,  $M = e^{6+\frac{1}{\pi}}$ .

по следствию 14

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq 8re^{-2t}, \quad (5.2.47)$$

$$|E_{\mathbf{p}}(t) - \phi(t)| \leq 4r^2e^{-2t}. \quad (5.2.48)$$

по следствию 15

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*(t)\| \leq 8re^{6+\frac{1}{\pi}-3t}, \quad (5.2.49)$$

$$|E_{\mathbf{p}}(t) - \phi^*(t)| \leq 4r^2e^{6+\frac{1}{\pi}-3t}. \quad (5.2.50)$$

по теореме 38 ( $N = 1$ ,  $a = \alpha$ ) - использование следствия 14:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{\varepsilon(1 + \ln 4r)}{2}, \quad (5.2.51)$$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq \frac{r\varepsilon(1 + \ln 4r)}{2}. \quad (5.2.52)$$

по теореме 38 ( $N = M$ ,  $a = \alpha^*$ ) - использование следствия 15:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{\varepsilon(7 + \frac{1}{\pi} + \ln 4r)}{3}, \quad (5.2.53)$$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq \frac{r\varepsilon(7 + \frac{1}{\pi} + \ln 4r)}{3}. \quad (5.2.54)$$

по теореме 48 - использование следствия 14:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq \frac{5\varepsilon r^2(1+r)}{4(1-\varepsilon)}. \quad (5.2.55)$$

по теореме 48 - использование следствия 15:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq \frac{\varepsilon e^{6+\frac{1}{\pi}} r^2 (1+r) (3 + 8e^{6+\frac{1}{\pi}})}{6(3-2\varepsilon)}. \quad (5.2.56)$$

Возьмем конкретнее  $r = 10^4$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$ , тогда по следствию 14 при  $t \geq 11$

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq \varepsilon, \quad (5.2.57)$$

при  $t \geq 15$

$$|E_{\mathbf{p}}(t) - \phi(t)| \leq \varepsilon. \quad (5.2.58)$$

по следствию 15 при  $t \geq 9$

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq \varepsilon, \quad (5.2.59)$$

при  $t \geq 12$

$$|E_{\mathbf{p}}(t) - \phi^*(t)| \leq \varepsilon. \quad (5.2.60)$$

по теореме 38 ( $N = 1$ ,  $a = \alpha$ ) - использование следствия 14:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq 5.798 \cdot 10^{-4}, \quad (5.2.61)$$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq 5.798. \quad (5.2.62)$$

по теореме 38 ( $N = M$ ,  $a = \alpha^*$ ) - использование следствия 15:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq 5.972 \cdot 10^{-4}, \quad (5.2.63)$$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq 5.972. \quad (5.2.64)$$

#### 5.2.4 Аппроксимация

Рассмотрим семейство «усеченных» процессов  $X_N(t)$ , с фазовыми пространствами  $E_N = \{0, 1, \dots, N\}$ , теми же интенсивностями и матрицами интенсивностей  $A_N(t)$ . Обозначим  $R = a + b$ .

$$A_N = \begin{pmatrix} a_{11} & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_N & 0 & \cdots \\ \lambda_1 & a_{22} & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{N-1} & 0 & \cdots \\ \cdots & & & & & & & \\ \lambda_N & \lambda_{N-1} & \lambda_{N-2} & \cdots & \lambda_1 & a_{NN} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & & & & & & & \end{pmatrix}$$

**Теорема 42.** Пусть выполняются условия следствия (15), тогда

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_N(t)\| \leq \frac{3KMR\omega_n^1 t}{\alpha^*}, \quad (5.2.65)$$

$$|E_{\mathbf{p}}(t) - E_{\mathbf{p}_N}(t)| \leq \frac{9KMR\omega_n^2 t}{\alpha^*}, \quad (5.2.66)$$

где  $\omega_n^1 = \sup_{k \geq N-4} \frac{1}{d_k}$  и  $\omega_n^2 = \sup_{k \geq N-4} \frac{k}{d_k}$ , при всех  $t \geq 0$ , любом  $n \geq N$  и начальных условиях  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_N(0) = 0$ .

**Доказательство.** Будем отождествлять векторы  $(x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots, 0)^T$  и  $(x_1, \dots, x_N)^T$ . Рассмотрим прямую систему Колмогорова для исходного процесса в следующей форме:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{A}_N(t)\mathbf{p} + (\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}_N(t))\mathbf{p}, \quad (5.2.67)$$

а также соответствующую систему

$$\frac{d\mathbf{p}_N}{dt} = \mathbf{A}_N(t)\mathbf{p}_N \quad (5.2.68)$$

для усеченного процесса.

Имеем

$$\mathbf{p}_N(t) = U_N(t)\mathbf{p}(0) \quad (5.2.69)$$

при  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_N(0)$  и

$$\mathbf{p}(t) = U_N(t)\mathbf{p}(0) + \int_0^t U_N(t, \tau) (\mathbf{A}(\tau) - \mathbf{A}_N(\tau)) \mathbf{p}(\tau) d\tau. \quad (5.2.70)$$

Тогда (в любой норме) получаем

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_N(t)\| = \left\| \int_0^t U_n(t, \tau) (\mathbf{A}(\tau) - \mathbf{A}_N(\tau)) \mathbf{p}(\tau) d\tau \right\|. \quad (5.2.71)$$

Рассмотрим матрицу Коши

$$U_N = \begin{pmatrix} u_{00}^N & . & . & u_{0N}^N & 0 & 0 & \cdots \\ u_{10}^N & . & . & u_{1N}^N & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & & & & & & \\ u_{N0}^N & . & . & u_{NN}^N & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & . & . & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & . & . & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots 0 & . & . & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.2.72)$$

Тогда

$$(\mathbf{A} - \mathbf{A}_N) \mathbf{p} =$$

$$= (0, \dots, (p_{N-2} + p_{N-1} + p_N) \lambda(t) + (p_{N+2} + p_{N+3}) \mu(t) - (2\mu(t) + 3\lambda(t)) p_{N+1}, \dots)^T$$

и, следовательно,

$$U_N (\mathbf{A} - \mathbf{A}_N) \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (p_{N-2} + p_{N-1} + p_N) \lambda(t) + (p_{N+2} + p_{N+3}) \mu(t) - (2\mu(t) + 3\lambda(t)) p_{N+1} \\ (p_{N-1} + p_N + p_{N+1}) \lambda(t) + (p_{N+3} + p_{N+4}) \mu(t) - (2\mu(t) + 3\lambda(t)) p_{N+2} \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (5.2.73)$$

$$\begin{aligned} \|U_N (\mathbf{A} - \mathbf{A}_N) \mathbf{p}\| &= \\ \sum_{k \geq 0} |(p_{N+k} + p_{N+k-1} + p_{N+k-2}) \lambda(t) + (p_{N+k+2} + p_{N+k+3}) \mu(t) - (2\mu(t) + 3\lambda(t)) p_{N+k+1}| &\leq \\ &\leq 3\lambda(t) \sum_{k \geq -2} p_{N+k} + 2\mu(t) \sum_{k \geq 1} p_{N+k} + R \sum_{k \geq 1} p_{N+k} \leq \\ &\leq 3R \sum_{k \geq -4} p_{N+k} \leq 3R\omega_n^1 \sum_{k \geq -4} d_{N+k} p_{N+k} \leq 3R\omega_n^1 \|\mathbf{p}(t)\|_{1D} \end{aligned} \quad (5.2.74)$$

где  $\omega_n^1 = \sup_{k \geq N-4} \frac{1}{d_k}$ . и

$$\begin{aligned} \|U_N (\mathbf{A} - \mathbf{A}_N) \mathbf{p}\|_{1E} &= \\ \sum_{k \geq 0} |(p_{N+k} + p_{N+k-1} + p_{N+k-2}) \lambda(t) + (p_{N+k+2} + p_{N+k+3}) \mu(t) - (2\mu(t) + 3\lambda(t)) p_{N+k+1}| & \\ \times (N+k+1) &\leq R \sum_{k \geq N-4} (6k+3) p_k \leq 9R\omega_n^2 \sum_{k \geq -4} d_{N+k} p_{N+k} \leq 9R\omega_n^2 \|\mathbf{p}(t)\|_{1D}, \end{aligned} \quad (5.2.75)$$

где  $\omega_n^2 = \sup_{k \geq N-4} \frac{k}{d_k}$ .

Получаем

$$\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_N(t)\| \leq \frac{3KMR\omega_n^1 t}{\alpha^*}, \quad (5.2.76)$$

$$|E_{\mathbf{p}}(t) - E_{\mathbf{p}_N}(t)| \leq \frac{9KMR\omega_n^2 t}{\alpha^*}, \quad (5.2.77)$$

где  $\|\mathbf{p}(t)\|_{1D}$  из (5.2.35).

При  $t \in [10, 11]$  из неравенства (5.2.17) получаем  $N_1 = 90$ ,  $N_2 = 100$ .

## 5.3 Счетные системы

### 5.3.1 Оценки скорости сходимости

Рассмотрим вспомогательную последовательность положительных чисел  $\{d_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots$  и треугольную матрицу  $D$  следующего вида:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & d_1 & d_1 & \cdots \\ 0 & d_2 & d_2 & \cdots \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (5.3.78)$$

Далее будут использоваться еще два пространства последовательностей:  $l_{1E} = \{z = (p_1, p_2, \dots)^T / \|z\|_{1E} \equiv \sum np_n < \infty\}$ , и «основное» пространство  $l_D = \{z = (p_1, p_2, \dots)^T / \|z\|_{1D} \equiv \|Dz\|_1 < \infty\}$ .

Положим

$$d = \inf_{i \geq 1} d_i, \quad W = \inf_{i \geq 1} \frac{d_i}{i}. \quad (5.3.79)$$

Рассмотрим выражения

$$\alpha_i(t) = -a_{ii}(t) - \sum_{k=1}^{i-1} (\mu_{i-k}(t) - \mu_i(t)) \frac{d_k}{d_i} - \sum_{k \geq 1} \lambda_k(t) \frac{d_{k+i}}{d_i}, \quad (5.3.80)$$

а также

$$\alpha(t) = \inf_{i \geq 1} \alpha_i(t) \quad (5.3.81)$$

и

$$\beta(t) = \sup_{i \geq 1} \alpha_i(t). \quad (5.3.82)$$

Положим

$$\zeta_i(t) = a_{ii}(t) + \sum_{k=1}^{i-1} (\mu_{i-k}(t) - \mu_i(t)) \frac{d_k}{d_i} + \sum_{k \geq 1} \lambda_k(t) \frac{d_{k+i}}{d_i}, \quad (5.3.83)$$

а также

$$\xi(t) = \sup_{i \geq 1} \zeta_i(t). \quad (5.3.84)$$

**Теорема 43.** Пусть существует последовательность положительных чисел  $\{d_j\}$  такая, что  $d > 0$  и

$$\int_0^\infty \alpha(t) dt = +\infty. \quad (5.3.85)$$

Тогда  $X(t)$  слабо эргодичен, при любых начальных условиях  $\mathbf{p}^*(s), \mathbf{p}^{**}(s)$  и любых  $s, t$ ,  $0 \leq s \leq t$ , справедлива оценка

$$e^{-\int_s^t \xi(u) du} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|_{1D} \leq \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_{1D} \leq e^{-\int_s^t \alpha(u) du} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|_{1D}. \quad (5.3.86)$$

Кроме того, если начальные условия таковы, что  $D(\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)) \geq 0$ , то любых  $s, t$ ,  $0 \leq s \leq t$ , справедлива оценка

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_{1D} \geq e^{-\int_s^t \beta(u) du} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|_{1D}. \quad (5.3.87)$$

**Доказательство.** Общий подход к исследованию в случае процессов рождения и гибели подробно описан в [59, 11]. Те же методы удастся применить и в рассматриваемой в настоящей работе данной ситуации, поэтому детали рассуждений здесь опущены.

Прежде всего положим  $p_0 = 1 - \sum_{i \geq 1} p_i$ . Тогда

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = B(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}(t), \quad (5.3.88)$$

где  $\mathbf{f}(t) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)^T$ ,

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_1 & \mu_1 - \lambda_1 & \mu_2 - \lambda_1 & \mu_3 - \lambda_1 & \cdots & \cdots & \mu_{r-1} - \lambda_1 & \cdots \\ \lambda_1 - \lambda_2 & a_{22} - \lambda_2 & \mu_1 - \lambda_2 & \mu_2 - \lambda_2 & \cdots & \cdots & \mu_{r-2} - \lambda_2 & \cdots \\ \lambda_2 - \lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_3 & a_{33} - \lambda_3 & \mu_1 - \lambda_2 & \cdots & \cdots & \mu_{r-3} - \lambda_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{r-1} - \lambda_r & \lambda_{r-2} - \lambda_r & \cdots & \cdots & \lambda_2 - \lambda_r & \lambda_1 - \lambda_r & a_{rr} - \lambda_r & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \quad (5.3.89)$$

Рассмотрим (5.3.88) как дифференциальное уравнение в пространстве  $l_D$ , при этом  $B(t)$  и  $\mathbf{f}(t)$  локально интегрируемы при  $t \geq 0$ .

Оценим логарифмическую норму

$$\gamma(B(t))_{1D} = \gamma(DB(t)D^{-1})_1. \quad (5.3.90)$$

Имеем

$$DBD^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & (\mu_1 - \mu_2)\frac{d_1}{d_2} & (\mu_2 - \mu_3)\frac{d_1}{d_3} & \cdots & (\mu_{r-1} - \mu_r)\frac{d_1}{d_r} & \cdots \\ \lambda_1\frac{d_2}{d_1} & a_{22} & (\mu_1 - \mu_3)\frac{d_2}{d_3} & \cdots & (\mu_{r-2} - \mu_r)\frac{d_2}{d_r} & \cdots \\ \lambda_2\frac{d_3}{d_1} & \lambda_1\frac{d_3}{d_2} & a_{33} & \cdots & (\mu_{r-3} - \mu_r)\frac{d_3}{d_r} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{r-1}\frac{d_r}{d_1} & \lambda_{r-2}\frac{d_r}{d_2} & \lambda_{r-3}\frac{d_r}{d_3} & \cdots & a_{rr} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \quad (5.3.91)$$

Получаем

$$\gamma(B(t))_{1D} = \sup \left( a_{ii}(t) + \sum_{k=1}^{i-1} (\mu_{i-k}(t) - \mu_i(t)) \frac{d_k}{d_i} + \sum_{k \geq 1} \lambda_k(t) \frac{d_{k+i}}{d_i} \right) = -\inf \alpha_i(t) = -\alpha(t). \quad (5.3.92)$$

Аналогично находим

$$\gamma(-B(t))_{1D} = \sup \zeta_i(t) = \xi(t).$$

Отсюда, как известно, и вытекает двухсторонняя оценка (5.3.86).

Для доказательства оценки (5.3.103) положим  $\mathbf{v}(t) = D(\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t))$ .

Тогда

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = DB(t)D^{-1}\mathbf{v}. \quad (5.3.93)$$

Все внедиагональные элементы матрицы  $DB(t)D^{-1}$  неотрицательны, значит из неотрицательности  $\mathbf{v}(s)$  следует неотрицательность  $\mathbf{v}(t)$  при всех  $t \geq s$ .

А значит,

$$\frac{d \sum v_i}{dt} \geq -\beta(t) \sum v_i, \quad (5.3.94)$$

откуда и вытекает неравенство (5.3.103).

**Следствие 16.** При выполнении условий теоремы справедлива следующая оценка скорости сходимости:

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_1 \leq \frac{4}{d} e^{-\int_s^t \alpha(u) du} g_i |p_i^*(s) - p_i^{**}(s)|, \quad (5.3.95)$$

при любых начальных условиях  $\mathbf{p}^*(s), \mathbf{p}^{**}(s)$  и любых  $s, t$ ,  $0 \leq s \leq t$ , где  $g_i = \sum_{n=1}^i d_n$ .

**Доказательство.** Достаточно воспользоваться оценками из [11], позволяющими сравнить рассматриваемые нормы:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}\|_{1D} &= d_1 \left| \sum_{i=1}^{\infty} p_i \right| + d_2 \left| \sum_{i=2}^{\infty} p_i \right| + d_3 \left| \sum_{i=3}^{\infty} p_i \right| + \dots \geq \\ &= d \left( \left| \sum_{i=1}^{\infty} p_i \right| + \left| \sum_{i=2}^{\infty} p_i \right| + \left| \sum_{i=3}^{\infty} p_i \right| + \dots \right) \geq \\ &= \frac{d}{2} \left( \left( \left| \sum_{i=1}^{\infty} p_i \right| + \left| \sum_{i=2}^{\infty} p_i \right| \right) + \left( \left| \sum_{i=2}^{\infty} p_i \right| + \left| \sum_{i=3}^{\infty} p_i \right| \right) + \dots \right) \geq \\ &= \frac{d}{2} \sum_{i=1}^{\infty} |p_i| = \frac{d}{2} \|\mathbf{z}\|_1, \end{aligned} \quad (5.3.96)$$

и значит,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_1 &\leq 2 \|\mathbf{z}^*(t) - \mathbf{z}^{**}(t)\|_1 \leq \frac{4}{d} \|\mathbf{z}^*(t) - \mathbf{z}^{**}(t)\|_{1D} \leq \\ &\leq \frac{4}{d} e^{-\int_s^t \alpha(u) du} \|\mathbf{z}^*(s) - \mathbf{z}^{**}(s)\|_{1D} \leq \frac{4}{d} e^{-\int_s^t \alpha(u) du} \sum_{i \geq 1} g_i |p_i^*(s) - p_i^{**}(s)|. \end{aligned} \quad (5.3.97)$$

**Теорема 44.** Пусть при выполнении условий предыдущей теоремы последовательность положительных чисел  $\{d_j\}$  такова, что  $W > 0$ . Тогда  $X(t)$  имеет предельное среднее  $\phi(t)$  и при любых  $k$  и  $t \geq 0$  справедливо неравенство

$$|E(t, k) - \phi(t)| \leq \frac{2g_k}{W} e^{-\int_0^t \alpha(u) du}. \quad (5.3.98)$$

**Доказательство.** Используем оценки из [11] для сравнения соответствующих норм:

$$\|\mathbf{z}\|_{1D} = d_1 \left| \sum_{i=1}^{\infty} p_i \right| + d_2 \left| \sum_{i=2}^{\infty} p_i \right| + \dots \geq W \sum_{k \geq 1} k \left| \sum_{i \geq k} p_i \right| \geq \frac{W}{2} \|\mathbf{z}\|_{1E} \quad (5.3.99)$$

вместо (5.3.96). Теперь, выбирая в качестве предельного среднего  $\phi(t) = E(t, 0)$  и соответствующие  $\mathbf{p}^*(t)$ ,  $\mathbf{p}^{**}(t)$ , получаем при произвольном  $k \geq 0$ :

$$\begin{aligned} |E(t; k) - \phi| &\leq \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_{1E} \leq \\ \frac{2}{W} \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_{1D} &\leq \frac{2}{W} e^{-\int_0^t \alpha(u) du} \|\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_0\|_{1D} = \frac{2g_k}{W} e^{-\int_0^t \alpha(u) du}. \end{aligned} \quad (5.3.100)$$

Рассмотрим теперь важнейшие частные случаи.

**Теорема 45.** Пусть  $X(t)$  стационарна (то есть интенсивности  $\lambda_k$  и  $\mu_k$  не зависят от  $t$ ), и существует последовательность положительных чисел  $\{d_j\}$  такая, что  $d > 0$  и  $\alpha = \inf_{i \geq 1} \alpha_i > 0$ . Тогда  $X(t)$  сильно эргодичен (со стационарным распределением  $\pi$ ), при любом начальном условии  $\mathbf{p}^*(0)$  и любом  $t \geq 0$  справедливы оценки

$$e^{-\xi t} \|\mathbf{p}^*(0) - \pi\|_{1D} \leq \|\mathbf{p}^*(t) - \pi\|_{1D} \leq e^{-\alpha t} \|\mathbf{p}^*(0) - \pi\|_{1D}. \quad (5.3.101)$$

и

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \pi\|_1 \leq \frac{4}{d} e^{-\alpha t} g_i |p_i^*(0) - \pi_i|, \quad (5.3.102)$$

Кроме того, если начальное условие таково, что  $D(\mathbf{p}^*(0) - \pi) \geq 0$ , то любым  $t \geq 0$  справедлива оценка

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \pi\|_{1D} \geq e^{-\beta t} \|\mathbf{p}^*(0) - \pi\|_{1D}. \quad (5.3.103)$$

**Замечание 11.** Аналогично, если выполнено дополнительное условие  $W > 0$ , получается результат о предельном среднем и оценка скорости сходимости к нему. Однако при этом теперь в качестве предельного среднего естественно выбрать постоянное  $\phi = \sum k\pi_k$ , соответствующее стационарному распределению. При этом оценка скорости сходимости выглядит следующим образом:

$$|E(t, k) - \phi| \leq \frac{2}{W} e^{-\alpha t} \|\mathbf{p}^*(0) - \pi\|_{1D}. \quad (5.3.104)$$

**Замечание 12.** Если интенсивности поступления и обслуживания требований  $\lambda_k$  и  $\mu_k$  1-периодичны по  $t$ , и существует последовательность положительных чисел  $\{d_j\}$  такая, что  $d > 0$ , а  $\alpha^* = \int_0^1 \alpha(t) dt > 0$ , то соответствующие предельный режим  $\mathbf{p}^{**}(t)$  и предельное среднее  $\phi(t)$  можно выбрать также 1-периодическими.

**Замечание 13.** Отметим, что если удастся выбрать  $d_i$  так, чтобы функции  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$  оказались одинаковыми (то есть  $\alpha_i(t)$  не зависят от  $i$ ), то получится точная по порядку оценка скорости сходимости.

**Замечание 14.** Если вдобавок интенсивности поступления и обслуживания требований постоянны, причем  $\lambda_1 > \lambda_2$  и  $\mu_1 > \mu_2$ , то, как вытекает из теоремы 9 [11], существует последовательность  $\{d_i\}$ , удовлетворяющая условиям предыдущего замечания (то есть такая, что  $\alpha = \beta$ ). Тем самым эта последовательность дает точное значение параметра сходимости.

### 5.3.2 Аппроксимация

Для получения дальнейших теорем необходима экспоненциальная эргодичность соответствующего процесса, то есть существование положительных констант  $M, a$  таких, что для оператора Коши уравнения (5.3.88) справедливо неравенство

$$\|U(t, s)\|_{1D} \leq M e^{-a(t-s)}. \quad (5.3.105)$$

Для простоты оценок пусть выполнены условия почти при всех  $t \geq 0$ :

$$\begin{aligned} L_\lambda(t) &\leq L_\lambda < \infty, L_\mu(t) \leq L_\mu < \infty, \\ d_1 \lambda_1(t) + (d_1 + d_2) \lambda_2(t) + \dots &\leq K < \infty. \end{aligned} \quad (5.3.106)$$

Теперь в предположении экспоненциальной эргодичности процесса можно оценить

$$\|\mathbf{z}(t)\|_{1D} \leq \|V(t)\|_{1D} \|\mathbf{z}(0)\|_{1D} + \int_0^t \|V(t, \tau)\|_{1D} \|\mathbf{z}(\tau)\|_{1D} d\tau \leq M e^{-at} \|\mathbf{z}(0)\|_{1D} + \frac{KM}{a}, \quad (5.3.107)$$

где  $V(t, \tau)$  - оператор Коши соответствующего неоднородного уравнения:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = B(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}(t), \quad (5.3.108)$$

где  $\mathbf{f}(t) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)^T$ ,

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_1 & \mu_1 - \lambda_1 & \mu_2 - \lambda_1 & \mu_3 - \lambda_1 & \dots & \dots & \mu_{r-1} - \lambda_1 & \dots \\ \lambda_1 - \lambda_2 & a_{22} - \lambda_2 & \mu_1 - \lambda_2 & \mu_2 - \lambda_2 & \dots & \dots & \mu_{r-2} - \lambda_2 & \dots \\ \lambda_2 - \lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_3 & a_{33} - \lambda_3 & \mu_1 - \lambda_3 & \dots & \dots & \mu_{r-3} - \lambda_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{r-1} - \lambda_r & \lambda_{r-2} - \lambda_r & \dots & \dots & \lambda_2 - \lambda_r & \lambda_1 - \lambda_r & a_{rr} - \lambda_r & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (5.3.109)$$

Значит, если взять  $X(0) = 0$ , то  $\mathbf{p}(0) = (1, 0, 0, \dots)$ , а  $\mathbf{z}(0) = 0$ , тогда

$$\|\mathbf{z}(t)\|_{1D} \leq \frac{KM}{a}. \quad (5.3.110)$$

Далее, предполагая все  $p_i \geq 0$ , оценим

$$\|Dz\| = \sum_{i \geq 1} p_i \sum_{k=1}^i d_k \geq (d_1 + \dots + d_n) \sum_{i \geq n} p_i = g_n \sum_{i \geq n} p_i(t), \quad (5.3.111)$$

откуда

$$\sum_{i=n}^{\infty} p_i \leq \frac{KM}{ag_n}. \quad (5.3.112)$$

Введем следующее выражение

$$\omega(m, n) = \sup_{k \geq 0} \frac{m + k}{g_{n+k}}, \quad m, n \geq 0.$$

Рассмотрим теперь "усеченный" процесс  $X_{N-1}$  с состояниями от 0 до  $N-1$ , заданный соответствующей матрицей

$$A_{N-1}(t) = \begin{pmatrix} b_{00} & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \cdots & \mu_{N-1} \\ \lambda_1 & b_{11} & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_{N-2} \\ \lambda_2 & \lambda_1 & b_{22} & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{N-3} \\ \cdots & & & & & & \\ \lambda_{N-1} & \lambda_{N-2} & \lambda_{N-3} & \cdots & \lambda_2 & \lambda_1 & b_{N-1, N-1} \end{pmatrix} \quad (5.3.113)$$

причем  $b_{ii}(t) = -\sum_{k=1}^i \mu_k(t) - \sum_{k=1}^{N-1-i} \lambda_{N-1-k}(t)$ .

**Теорема 46.** Пусть  $X(t)$  экспоненциально эргодичен, и при некотором  $\varepsilon$  существует такое  $r$ , что почти при всех  $t \geq 0$  выполняются неравенства

$$\sum_{i=r+1}^{\infty} \lambda_i(t) \leq \varepsilon, \quad \sum_{i=1}^{\infty} (r+i) \lambda_{r+i}(t) \leq \varepsilon, \quad (5.3.114)$$

тогда при всех  $t \geq 0$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|E(t, 0) - E_{N-1}(t, 0)\| \leq \\ & \frac{KMt(N-1)}{a} \left( \frac{a(N-r)\varepsilon}{KM} + \frac{L_\mu}{g_N} + \frac{L_\lambda}{g_{N-r}} \right) + \\ & + \frac{KMt}{a} \left( \omega(N, N)(L_\lambda + L_\mu) + \sum_{k \geq 1} \mu_k \omega(N, N+k) + \sum_{k=1}^r \lambda_k \omega(N, N-k) + \varepsilon \left( \frac{a}{KM} + \frac{2}{W} \right) \right). \end{aligned} \quad (5.3.115)$$

**Доказательство.** Векторы вероятностей состояний для усеченного процесса описывается уравнением

$$\frac{d\mathbf{p}^*}{dt} = A_{N-1}(t)\mathbf{p}^*. \quad (5.3.116)$$

Перепишем исходное уравнение в следующей форме:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A_{N-1}(t)\mathbf{p} + (A(t) - A_{N-1}(t))\mathbf{p} \quad (5.3.117)$$

Тогда получаем (отождествляя конечномерный вектор и соответствующий ему счетный вектор с теми же "начальными" ненулевыми координатами):

$$\mathbf{p}(t) = U_{N-1}(t, 0)\mathbf{p}(0) + \int_0^t U_{N-1}(t, \tau)(A(\tau) - A_{N-1}(\tau))\mathbf{p}(\tau)d\tau \quad (5.3.118)$$

и

$$\mathbf{p}^*(t) = U_{N-1}(t, 0)\mathbf{p}^*(0) \quad (5.3.119)$$

Будем считать, что  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}^*(0)$ . Тогда

$$\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*(t) = \int_0^t U_{N-1}(t, \tau)(A(\tau) - A_{N-1}(\tau))\mathbf{p}(\tau)d\tau \quad (5.3.120)$$

Оценим  $U_{N-1}(t, \tau)(A(\tau) - A_{N-1}(\tau))\mathbf{p}(\tau)$  в норме  $1E$ .

Запишем

$$A(t) - A_{N-1}(t) = \begin{pmatrix} C_{0,0}(t) & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \mu_N(t) & \cdots \\ 0 & C_{1,1}(t) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \mu_{N-1}(t) & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \mu_{N-2}(t) & \cdots \\ \cdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & C_{N-r,N-r}(t) & 0 & \cdots & \mu_r(t) & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & C_{N-r+1,N-r+1}(t) & \cdots & \mu_{r-1}(t) & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \mu_{r-2}(t) & \cdots \\ \cdots & & & & & & & \\ \lambda_N(t) & \lambda_{N-1}(t) & \cdots & \lambda_r(t) & \lambda_{r-1}(t) & \cdots & a_{N,N} & \cdots \\ \cdots & & & & & & & \end{pmatrix} \quad (5.3.121)$$

Тогда

$$(A - A_{N-1})\mathbf{p} = \begin{pmatrix} C_{0,0}p_0 + \mu_N p_N + \mu_{N+1} p_{N+1} + \cdots \\ C_{1,1}p_1 + \mu_{N-1} p_N + \mu_N p_{N+1} + \cdots \\ C_{2,2}p_2 + \mu_{N-2} p_N + \mu_{N-1} p_{N+1} + \cdots \\ \cdots \\ C_{N-1,N-1}p_{N-1} + \mu_1 p_N + \mu_2 p_{N+1} + \cdots \\ \lambda_N p_0 + \cdots + \lambda_1 p_{N-1} + a_{N,N} p_N + \mu_1 p_{N+1} + \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ \cdots \\ R_{N-1} \\ R_N \\ \cdots \end{pmatrix} \quad (5.3.122)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|U(A - A_{N-1})\mathbf{p}\|_{1E} &\leq (N-1)(|R_1| + |R_2| + |R_3| + \dots + |R_{N-1}|) + N|R_N| + (N+1)|R_{N+1}| + \dots \leq \\ &\quad (N-1)(|R_1| + |R_2| + |R_3| + \dots + |R_{N-1}|) + \\ &\quad N|a_{N,N}|p_N + (N+1)|a_{N+1,N+1}|p_{N+1} + \dots \\ &\quad \mu_1(Np_{N+1} + (N+1)p_{N+2} + \dots) + \mu_2(Np_{N+2} + (N+1)p_{N+3} + \dots) + \dots \\ &\quad \lambda_1(Np_{N-1} + (N+1)p_N + \dots) + \dots + \lambda_r(Np_{N-r} + (N+1)p_{N-r+1} + \dots) + \dots \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно каждую группу слагаемых в правой части неравенства.

Первая группа оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} (N-1)(|R_1| + |R_2| + |R_3| + \dots + |R_{N-1}|) &\leq (N-1)(p_N \sum_{k=1}^{N-1} \mu_k + p_{N+1} \sum_{k=2}^N \mu_k + \dots + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N-1} |C_{kk}|p_k \leq (N-1)((N-r)\varepsilon + \frac{L_\mu KM}{ag_N} + L_\lambda(p_{N-r} + p_{N-r+1} + \dots)) \\ &\quad (N-1)((N-r)\varepsilon + \frac{L_\mu KM}{ag_N} + \frac{L_\lambda KM}{ag_{N-r}}) \end{aligned}$$

Для оценки остальных выражений отметим, что

$$\sum_{k \geq 0} (m+k)p_{n+k} \leq \sum_{k \geq 0} \frac{m+k}{g_{n+k}} g_{n+k} p_{n+k} \leq \omega(m, n) \|\mathbf{z}\|_{1D} \leq \frac{\omega(m, n)KM}{a}, \quad (5.3.123)$$

тогда

$$N|a_{N,N}|p_N + (N+1)|a_{N+1,N+1}|p_{N+1} + \dots \leq \frac{\omega(N, N)KM(L_\lambda + L_\mu)}{a}. \quad (5.3.124)$$

Третья группа слагаемых оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu_1(Np_{N+1} + (N+1)p_{N+2} + \dots) + \mu_2(Np_{N+2} + (N+1)p_{N+3} + \dots) + \dots \leq \\ \leq \frac{KM}{a} \sum_{k \geq 1} \mu_k \omega(N, N+k). \end{aligned} \quad (5.3.125)$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
& \lambda_1(Np_{N-1} + (N+1)p_N + \dots) + \lambda_2(Np_{N-2} + (N+1)p_{N-1} + \dots) + \dots + \\
& \lambda_r(Np_{N-r} + (N+1)p_{N-r+1} + \dots) + \dots \leq \lambda_1(Np_{N-1} + (N+1)p_N + \dots) + \\
& \lambda_2(Np_{N-2} + (N+1)p_{N-1} + \dots) + \dots + \lambda_r(Np_{N-r} + (N+1)p_{N-r+1} + \dots) + \\
& (r+1)\lambda_{r+1}(p_0 + \frac{r+2}{r+1}p_1 + \frac{r+3}{r+1}p_2 + \dots) + \dots + N\lambda_N(p_0 + \frac{N+1}{N}p_1 + \frac{N+2}{N}p_2 + \dots) + \dots \leq \\
& \frac{KM}{a} \sum_{k=1}^r \lambda_k \omega(N, N-k) + ((r+1)\lambda_{r+1} + (r+2)\lambda_{r+2} + \dots)(p_0 + \frac{r+2}{r+1}p_1 + \frac{r+3}{r+1}p_2 + \dots) \leq \\
& \frac{KM}{a} \sum_{k=1}^r \lambda_k \omega(N, N-k) + \varepsilon_1(p_0 + \frac{r+2}{r+1}p_1 + \frac{r+3}{r+1}p_2 + \dots) \leq \\
& \frac{KM}{a} \sum_{k=1}^r \lambda_k \omega(N, N-k) + \varepsilon_1(1 + \|\mathbf{z}(t)\|_{1E}) \leq \frac{KM}{a} \sum_{k=1}^r \lambda_k \omega(N, N-k) + \varepsilon_1(1 + \frac{2}{W}\|\mathbf{z}(t)\|_{1D}) \leq \\
& \leq \frac{KM}{a} \sum_{k=1}^r \lambda_k \omega(N, N-k) + \varepsilon(1 + \frac{2KM}{Wa}).
\end{aligned}$$

А тогда получаем, что и требовалось.

**Следствие 17.** Пусть  $X(t)$  экспоненциально эргодичен и выполнется условие

$$\sum_{i=r}^{\infty} \lambda_i(t) = 0, \quad (5.3.126)$$

тогда при всех  $t \geq 0$  справедлива оценка

$$\begin{aligned}
& \|E(t, 0) - E_{N-1}(t, 0)\| \leq \\
& \frac{KMt}{a} \left( (N-1) \left( \frac{L_\mu}{g_N} + \frac{L_\lambda}{g_{N-r}} \right) + \omega(N, N)(L_\lambda + L_\mu) + \sum_{k \geq 1} \mu_k \omega(N, N+k) + \sum_{k=1}^r \lambda_k \omega(N, N-k) \right).
\end{aligned}$$

### 5.3.3 Пример

Рассмотрим процесс обслуживания  $X(t)$  с интенсивностями  $\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = \lambda_3(t) = 5$ ,  $\mu_1(t) = \mu_2(t) = 13 + \cos 2\pi t$ , а остальные интенсивности равны нулю. Тогда  $d^k = 1.1^k$

$$L_\lambda = 15, \quad L_\mu = 28, \quad r = 3, \quad \varepsilon = 0, \quad K = 35.255,$$

$$W = 0.259, \quad g_n = \frac{d(d^n - 1)}{d - 1} = 11(1.1^n - 1), \quad \omega(m, n) = \frac{m}{11(1.1^n - 1)}$$

$$\gamma(B(t))_{1D} \leq -\alpha(t), \quad \|U(t, s)\|_{1D} \leq e^{-\int_s^t \alpha(u) du} \leq M e^{-a(t-s)}$$

при  $M_0 = \max_{|t-s| \leq 1} \int_s^t \alpha(u) du$ ,  $a = \int_0^1 \alpha(t) dt$ ,  $M = e^{M_0+a}$ .

$$\alpha(t) = \left(2 - \frac{1}{d} - \frac{1}{d^2}\right) \mu(t) - (d + d^2 + d^3 - 3) \lambda(t) = 0.233 + 0.26 \cos 2\pi t$$

Получаем  $a = 0.233$ ,  $M_0 = 0.233 + \frac{0.26}{\pi}$  и  $M = 1.731$ .

При  $t = 10$ ,  $N = 300$ .

$$|E_{N-1}(t, 0) - E(t, 0)| \leq 3.872 \cdot 10^{-6}. \quad (5.3.127)$$

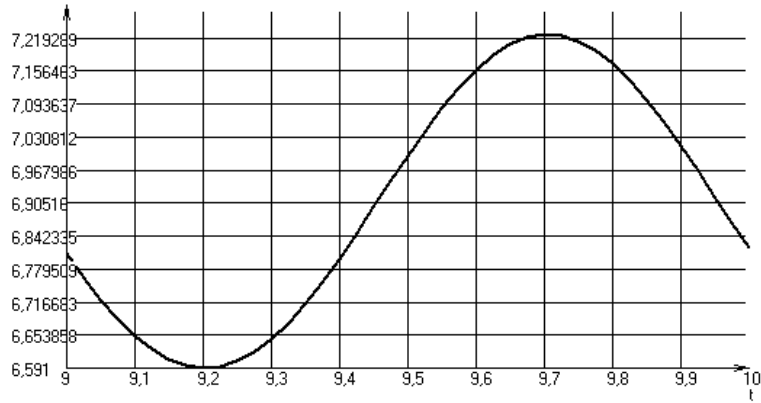


Рис. 5.1: Приближенное значение  $E(t, 0)$

#### 5.3.4 Устойчивость

Рассмотрим пространство состояний  $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ , положительную возрастающую последовательность  $\{d_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots$  и соответствующую треугольную матрицу  $D$ :

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & d_1 & d_1 & \cdots \\ 0 & d_2 & d_2 & \cdots \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (5.3.128)$$

Пусть

$$d = \inf_{i \geq 1} d_i, \quad W = \inf_{i \geq 1} \frac{d_i}{i}, \quad g_i = \sum_{n=1}^i d_n. \quad (5.3.129)$$

Обозначим

$$\alpha_i(t) = -a_{ii}(t) - \sum_{k \geq 1} \lambda_k(t) \frac{d_{k+i}}{d_i} - \sum_{k=1}^{i-1} (\mu_{i-k}(t) - \mu_i(t)) \frac{d_k}{d_i}, \quad (5.3.130)$$

и

$$\alpha(t) = \inf_{i \geq 1} \alpha_i(t). \quad (5.3.131)$$

**Теорема 47.** Пусть существует положительная последовательность  $\{d_j\}$  и положительные числа  $M, a$  такие, что  $d > 0$ ,  $W > 0$ , и

$$e^{-\int_s^t \alpha(u) du} \leq M e^{-a(t-s)} \quad (5.3.132)$$

для всех  $0 \leq s \leq t$ . Тогда  $X(t)$  слабо эргодичен и выполняются следующие оценки:

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_{1D} \leq M e^{-a(t-s)} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|_{1D}, \quad (5.3.133)$$

для всех  $\mathbf{p}^*(s), \mathbf{p}^{**}(s)$  и всех  $s, t$ ,  $0 \leq s \leq t$ ,

и

$$|E(t, k) - E(t, 0)| \leq \frac{2Mg_k}{W} e^{-at}, \quad (5.3.134)$$

для любых  $k$  и всех  $t \geq 0$ .

Будем предполагать, что

$$d_1 \lambda_1(t) + (d_1 + d_2) \lambda_2(t) + \cdots \leq K < \infty, \quad (5.3.135)$$

для почти всех  $t \geq 0$ .

Пусть, кроме того,

$$\sum_{i=r+1}^{\infty} \lambda_i(t) \leq \varepsilon, \quad \sum_{i=1}^{\infty} r \lambda_{r+i}(t) \leq \varepsilon, \quad (5.3.136)$$

для некоторых  $r$  и почти всех  $t \geq 0$ .

Пусть

$$\omega(m, n) = \sup_{k \geq 0} \frac{m + k}{g_{n+k}}, \quad m, n \geq 0. \quad (5.3.137)$$

Используя замену  $p_0(t) = 1 - \sum_{i \geq 1} p_i(t)$ , рассмотрим следующее уравнение

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = B(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}(t), \quad (5.3.138)$$

где  $\mathbf{f}(t) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)^T$ ,

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_1 & \mu_1 - \lambda_1 & \cdots & \mu_{r-1} - \lambda_1 & \cdots \\ \lambda_1 - \lambda_2 & a_{22} - \lambda_2 & \cdots & \mu_{r-2} - \lambda_2 & \cdots \\ \lambda_2 - \lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_3 & \cdots & \mu_{r-3} - \lambda_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{r-1} - \lambda_r & \lambda_{r-2} - \lambda_r & \cdots & a_{rr} - \lambda_r & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \quad (5.3.139)$$

По теореме 47 и используя оценку (5.3.135), получаем следующее

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}(t)\|_{1D} &\leq \int_0^t \|V(t, \tau)\|_{1D} \|\mathbf{z}(\tau)\|_{1D} d\tau + \\ &\|V(t)\|_{1D} \|\mathbf{z}(0)\|_{1D} \leq \frac{KM}{a} + Me^{-at} \|\mathbf{z}(0)\|_{1D}, \end{aligned} \quad (5.3.140)$$

где  $V(t, \tau)$  оператор Коши уравнения (5.3.138).

Кроме того, если  $X(0) = 0$ , тогда  $\mathbf{p}(0) = (1, 0, 0, \dots)^T$ ,  $\mathbf{z}(0) = 0$ , и мы получаем

$$\|\mathbf{z}(t)\|_{1D} \leq \frac{KM}{a}. \quad (5.3.141)$$

Пусть теперь  $p_i \geq 0$  для всех  $i$ . Тогда

$$\|Dz\| = \sum_{i \geq 1} p_i \sum_{k=1}^i d_k \geq (d_1 + \cdots + d_n) \sum_{i \geq n} p_i = g_n \sum_{i \geq n} p_i(t), \quad (5.3.142)$$

следовательно

$$\sum_{i=n}^{\infty} p_i \leq \frac{KM}{ag_n}. \quad (5.3.143)$$

Рассмотрим уравнение (5.3.138) в пространстве  $l_D$ , где  $B(t)$  и  $\mathbf{f}(t)$  локально интегрируемы на  $(0, +\infty)$ .

$$DBD^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & (\mu_1 - \mu_2) \frac{d_1}{d_2} & (\mu_2 - \mu_3) \frac{d_1}{d_3} & \cdots & (\mu_{r-1} - \mu_r) \frac{d_1}{d_r} & \cdots \\ \lambda_1 \frac{d_2}{d_1} & a_{22} & (\mu_1 - \mu_3) \frac{d_2}{d_3} & \cdots & (\mu_{r-2} - \mu_r) \frac{d_2}{d_r} & \cdots \\ \lambda_2 \frac{d_3}{d_1} & \lambda_1 \frac{d_3}{d_2} & a_{33} & \cdots & (\mu_{r-3} - \mu_r) \frac{d_3}{d_r} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{r-1} \frac{d_r}{d_1} & \lambda_{r-2} \frac{d_r}{d_2} & \lambda_{r-3} \frac{d_r}{d_3} & \cdots & a_{rr} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \quad (5.3.144)$$

Рассмотрим теперь "возмущенный" процесс  $\bar{X} = \bar{X}(t)$ ,  $t \geq 0$ , с матрицей интенсивностей  $\bar{A}(t)$ . Будем предполагать, что возмущения малы, то есть  $\|\mathbf{A}(t) - \bar{\mathbf{A}}(t)\| \leq \varepsilon$ .

**Теорема 48.** Пусть

$$\sum_{i=r+1}^{\infty} \lambda_i(t) = \sum_{i=r+1}^{\infty} \bar{\lambda}_i(t) = 0, \quad (5.3.145)$$

для всех  $k$  и почти всех  $t \geq 0$ ,  $\lambda_k(t) < \infty$ . Тогда справедливы следующие оценки устойчивости:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)| \leq \frac{\varepsilon M(La + 2SKM)}{a(a - 2\varepsilon S)} \quad (5.3.146)$$

и

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq \frac{\varepsilon M(La + 2SKM)}{Wa(a - 2\varepsilon S)} \quad (5.3.147)$$

для любых начальных условий  $\mathbf{p}(s)$  и  $\bar{\mathbf{p}}(s)$  для  $X(t)$  и  $\bar{X}(t)$  соответственно.

**Доказательство.** Перепишем систему (5.3.138) в следующей форме:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \bar{\mathbf{B}}(t)\mathbf{p}(t) + \mathbf{f}(t) + (\mathbf{B}(t) - \bar{\mathbf{B}}(t))\mathbf{p}(t) \quad (5.3.148)$$

Имеем

$$\mathbf{p}(t) = \bar{U}(t, 0)\mathbf{p}(0) + \int_0^t \bar{U}(t, \tau)\mathbf{f}(\tau) d\tau + \int_0^t \bar{U}(t, \tau) \hat{\mathbf{B}}(\tau)\mathbf{p}(\tau)d(\tau), \quad (5.3.149)$$

и

$$\bar{\mathbf{p}}(t) = \bar{U}(t, 0)\bar{\mathbf{p}}(0) + \int_0^t \bar{U}(t, \tau)\mathbf{f}(\tau) d\tau. \quad (5.3.150)$$

Тогда в любой норме при одинаковых начальных условиях

$$\|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \int_0^t \|\bar{U}(t, \tau)\| (\|\mathbf{B}(\tau) - \bar{\mathbf{B}}(\tau)\| \|\mathbf{p}(\tau)\| + \|\mathbf{f}(\tau) - \bar{\mathbf{f}}(\tau)\|) d\tau. \quad (5.3.151)$$

Имеем

$$\|\mathbf{B}(t) - \bar{\mathbf{B}}(t)\|_{1D} = \|D(\mathbf{B}(t) - \bar{\mathbf{B}}(t))D^{-1}\| \leq 2\varepsilon S. \quad (5.3.152)$$

Поэтому

$$\gamma(\bar{\mathbf{B}}(t))_{1D} \leq \gamma(D\mathbf{B}(t)D^{-1}) + \|\mathbf{B}(t) - \bar{\mathbf{B}}(t)\|_{1D} \leq -\alpha(t) + 2\varepsilon S. \quad (5.3.153)$$

где  $\|U(t, s)\|_{1D} \leq Ne^{-a(t-s)}$  и  $S = \sup_{1 \leq i, j \leq r} \frac{d_i}{d_j}$ , и  $K, L$  такие, что

$$d_1\lambda_1(t) + (d_1 + d_2)\lambda_2(t) + \dots + \left(\sum_{1 \leq i \leq r} d_i\right)\lambda_r(t) \leq K,$$

$$d_1(\lambda_1(t) - \bar{\lambda}_1(t)) + (d_1 + d_2)(\lambda_2(t) - \bar{\lambda}_2(t)) + \dots + \left(\sum_{1 \leq i \leq r} d_i\right)(\lambda_r(t) - \bar{\lambda}_r(t)) \leq L\varepsilon.$$

Кроме того,  $\|\mathbf{f}(\tau) - \bar{\mathbf{f}}(\tau)\|_{1D} \leq L\varepsilon$ ,  $\|\mathbf{f}(t)\|_{1D} \leq K$ .

Используя оценки (5.3.140) (5.3.151), получаем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| &\leq \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\|_{1D} \leq \\ &\leq M \int_0^t e^{-(a-2\varepsilon S)(t-\tau)} \left(2\varepsilon S(Me^{-a\tau}\|\mathbf{p}(0)\|_{1D} + \frac{KM}{a}) + L\varepsilon\right) d\tau \\ &\leq o(1) + \frac{M\varepsilon(L + \frac{2SKM}{a})}{a - 2\varepsilon S}. \end{aligned} \quad (5.3.154)$$

В итоге имеем

$$\begin{aligned} |E(t, 0) - \phi(t)| &\leq \|\mathbf{z}(t)\|_{1E} \leq W^{-1}\|\pi(t) - \mathbf{p}(t)\|_{1D} \leq \\ &\leq W^{-1}(o(1) + \frac{M\varepsilon(L + \frac{2SKM}{a})}{a - 2\varepsilon S}), \end{aligned} \quad (5.3.155)$$

где  $W = \inf_k \frac{\sum_{i \leq k} d_i}{k}$ .

### 5.3.5 Примеры

**Пример 16.** Рассмотрим модель обслуживания с групповым обслуживанием требований с интенсивностями  $\lambda_1(t) = \lambda(t) = 1 + \sin 2\pi t$ ,  $\lambda_i(t) = 0$  для всех  $i > 1$  и всех  $t \geq 0$ , и  $\mu_k(t) = \frac{\mu(t)}{k}$ , если  $k \leq S < \infty$ , и  $\mu_i(t) = 0$  для всех  $i > S$  и всех  $t \geq 0$ , где  $\mu(t) = 3 + \cos 2\pi t$ . Пусть  $S = 10^{12}$ .

$L_\lambda(t) = 2$ ,  $L_\mu(t) = 4(1 + \ln S) \leq 25$ ,  $r = 1$ . Пусть  $d_k = 2^{k-1}$ , тогда  $W = 1$ ,  $g_k = 2^k - 1$ ,  $H = 2$ ,  $K = 2$  и  $\alpha_k(t) \geq \mu(t) - \lambda(t)$  для  $k \geq 1$ . Следовательно,  $\alpha(t) = 2 + \cos 2\pi t - \sin 2\pi t$ ,  $a = 2$ ,  $M = 2$ .

По теореме 48 имеем

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq 10^{-5}. \quad (5.3.156)$$

По оценкам предыдущих параграфов получаем

$$|E(t, 0) - \phi(t)| \leq 8e^{-2t} \quad (5.3.157)$$

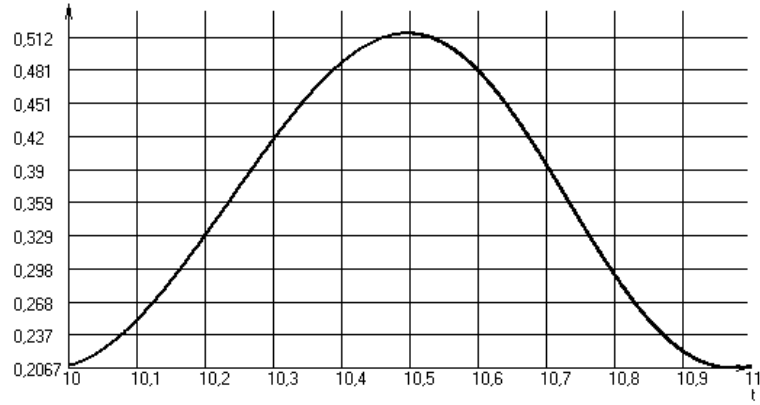
и

$$|E(t, 0) - E_N(t, 0)| \leq \frac{25Nt}{2^{N-1} - 2}. \quad (5.3.158)$$

График построен при  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $N = 30$  на интервале  $[10, 11]$  с погрешностью  $10^{-3}$ .

**Пример 17.** Рассмотрим модель обслуживания с групповым поступлением требований с интенсивностями  $\mu_1(t) = \mu(t) = 1 + \cos 2\pi t$ ,  $\mu_i(t) = 0$  для всех  $i > 1$  и всех  $t \geq 0$ , и  $\lambda_k(t) = \frac{\lambda(t)}{4^k}$ , если  $\lambda(t) = 1 + \sin 2\pi t$ .

$L_\lambda(t) < 1$ ,  $L_\mu(t) = 4$ . Пусть  $d_k = 2^{k-1}$ , тогда  $W = 1$ ,  $g_k = 2^k - 1$ ,  $K = 2$  и  $\alpha_k(t) \geq \frac{1}{2}\mu(t) - \frac{2}{3}\lambda(t)$  для  $k \geq 1$ . Следовательно,  $\alpha(t) = \frac{5}{6} + \frac{1}{2}\cos 2\pi t - \frac{2}{3}\sin 2\pi t$ ,  $a = \frac{5}{6}$ ,  $M = 2$ .

Рис. 5.2: Приближенное значение  $\bar{E}(t, 0)$ 

По теореме 48 имеем

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |E_{\mathbf{p}}(t) - \bar{E}_{\bar{\mathbf{p}}(t)}| \leq 5.088 \cdot 10^{-5}. \quad (5.3.159)$$

По оценкам предыдущих параграфов получаем

$$|E(t, 0) - \phi(t)| \leq 20e^{-\frac{5}{6}t}. \quad (5.3.160)$$

и

$$5t \left( (N-1) \left( \frac{N-15}{4} \cdot 10^{-8} + \frac{4}{2^N-1} + \frac{1}{2^{15}-1} \right) + \frac{5N}{2^N-1} + \frac{4N}{2^{N+1}-1} + \frac{30}{2^{N-15}-1} + 3 \cdot 10^8 \right) \leq |E(t, 0) - E_N(t, 0)|.$$

График построен при  $N = 35$  на интервале  $[8, 9]$  с погрешностью  $10^{-3}$ .

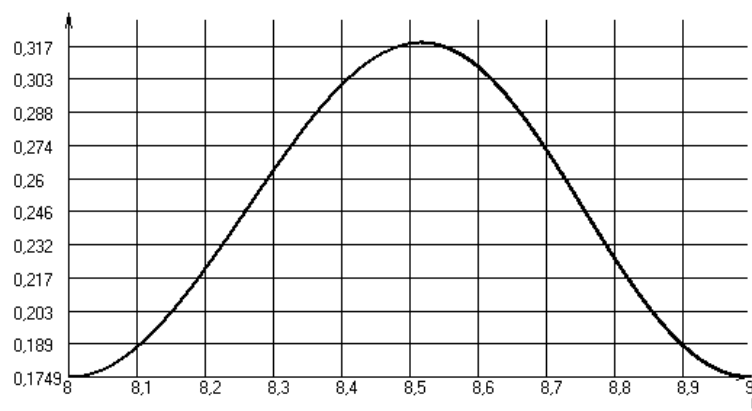


Рис. 5.3: Приближенное значение  $\bar{E}(t, 0)$

## Заключение

### Основные результаты.

Таким образом в работе получены следующие результаты:

- 1) для моделей массового обслуживания с нестационарным марковским поступлением и обслуживанием требований с  $N$  серверами и  $R$  местами ожидания ( $M_t/M_t/N/N+R$ ,  $R \geq 0$ ) в случае равномерной эргодичности (напр., см. теоремы 28, 36) получена оценка устойчивости, в которой множитель  $N$ , имеющий порядок размерности системы, заменен на  $\ln N$ ;
- 2) для тех же моделей с возможностью катастроф найдены предельные характеристики ;
- 3) изучены модели массового обслуживания с групповым поступлением и обслуживанием требований, для которых получены оценки устойчивости, что позволило провести построение предельных характеристик для более сложных близких к ним нестационарных систем обслуживания; 4) разработан комплекс программ, реализующий алгоритм построения предельных характеристик и позволяющий проводить вычислительные эксперименты при исследовании марковских процессов.

Результаты, полученные в диссертации, позволяют расширить круг допустимых моделей за счет использования близких к известным возмущенных процессов.

# Приложение

## Описание программы

Приложение посвящено численному вычислению предельной средней и двойной средней.

Программа состоит из нескольких блоков:

1. Ввод данных - модель, количество уравнений в системе, интенсивности, начальный вектор и прочие.
2. Вычисление оператора Коши, решение системы дифференциальных уравнений, нахождение предельной средней, построение графика предельной средней.

Программа позволяет с приемлемой скоростью находить предельную среднюю и двойную среднюю в случаях достаточно большого количества уравнений  $N$  в системе и больших  $t$ .

Для решения системы используется классический метод Рунге-Кутты четвертого порядка. Для нахождения предельной средней используется метод Симпсона (вычисление интеграла).

## Литература

1. Андреев, Д. Эргодичность и устойчивость нестационарных систем обслуживания / Д. Андреев, М. Елесин, А. Кузнецов, Е. Крылов, А. Зейфман // Теория вероятностей и математическая статистика. - 2003. - т.68. - с. 1-11.
2. Анисимов, В.В. Оценки отклонений переходных характеристик неоднородных марковских процессов / В.В. Анисимов // Укр.матж.ж.. - 1988. - 40. - с. 699-706.
3. Афанасьева, Л. Г., Булинская, Е. В. Случайные процессы в теории массового обслуживания / Л.Г. Афанасьева, Е. В. Булинская. - М.: Изд-во МГУ. - 1980.
4. Башарин, Г.П., Самуйлов, К.Е., Яркина, Н.В., Гудкова, И.А. Новый этап развития математической теории телетрафика / Г.П. Башарин, К.Е. Самуйлов, Н.В. Яркина, И.А. Гудкова // Автоматика и телемеханика. - 2009. - N12.- 16-28.
5. Башарин, Г.П., Харкевич, А.Д., Шнепс, М.А. Массовое обслуживание в телефонии / Г.П. Башарин, А.Д. Харкевич, М.А. Шнепс. - Наука. - 1968.
6. Боровков, А.А. Эргодичность и устойчивость случайных процессов / А.А. Боровков. - М.: Эдиториал УРСС. - 1999.

7. Бочаров, П.П., Печинкин, А.В. Теория массового обслуживания / П.П. Бочаров, А.В. Печинкин. - М.: Изд-во Рос. ун-та дружбы народов. -1995.
8. Гнеденко, Б.В., Макаров, И.П. Свойства решений задачи с потерями в случае периодических интенсивностей / Б.В. Гнеденко, И.П. Макаров // Дифференциальные уравнения. - 7. - N9. - с. 1696-1698.
9. Далецкий, Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. - М.: Наука, 1970.
10. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. - М.: Издательство Московского Университета, 1998. - с. 480.
11. Зейфман, А.И., Бенинг, В.Е., Соколов, И.А. Марковские цепи и модели с непрерывным временем. - М.: Элекс-КМ, 2008.
12. Зейфман, А.И. Стохастические модели. Процессы рождения и гибели / А.И. Зейфман. - Вологда: Издательство "Русь 1994.
13. Зейфман, А.И., Сатин, Я.А., Чегодаев, А.В. О нестационарных системах обслуживания с катастрофами / А.И. Зейфман, Я.А. Сатин, А.В. Чегодаев // Информатика и ее применения. - 2009. - N3. - Вып. 1. - с. 47-54.
14. Зейфман, А.И. О нестационарной модели Эрланга / А.И. Зейфман // Автоматика и телемеханика. - 2009. - N12. - с. 71-80.
15. Лозинский, С.М. Оценка погрешности численного интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения / С.М. Лозинский // Изв. ВУЗов. Матем., 1958. - N5. - с. 52-90.
16. Калашников, В.В. Качественный анализ сложных систем методом пробных функций / В. В. Калашников. - М.: Наука, 1978.

17. Печинкин, А.В., Соколов, И.А., Чаплыгин, В.В. Многолинейная система массового обслуживания с групповым отказом приборов / А.В. Печинкин, И.А. Соколов, В.В. Чаплыгин // Информатика и её применения. - 2009. - 3(3). - с. 4-15.
18. Сатин, Я.А. Исследование некоторых средних характеристик стохастических моделей: дисс. ... канд. ф.-м. наук / Я. А. Сатин. - Вологда, 2007. - 129 с.
19. Чегодаев, А.В. Математические модели и методы оценки характеристик стохастических систем, близких к поглощающим: дисс. ... канд. ф.-м. наук / А. В. Чегодаев. - Вологда, 2009. - 127 с.
20. Штойян, Д. Качественные свойства и оценки стохастических моделей / Д. Штойян. - М.: Мир, 1979.
21. Ching, Wai-Ki; Ng, Michael, K. Markov chains: models, algorithms and applications / Wai-Ki Ching, K. Michael. - International Series in Operations Research & Management Science 83. New York, NY: Springer, 2006.
22. Di Crescenzo, A., Giorno, V., Nobile, A.G., Ricciardi, L.M. On the M/M/1 queue with catastrophes and its continuous approximation / A. Di Crescenzo , V. Giorno , A.G. Nobile , L.M. Ricciardi // Queueing Syst., 2003. - 43. - p. 329-347.
23. Diaconis, P. The cutoff phenomenon in finite Markov chains / P. Diaconis // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. - 1996. - 93. - p. 1659-1664.
24. Diaconis, P., Saloff-Coste, L. Separation cut-off for birth and death chains / P. Diaconis, L. Saloff-Coste // Ann. Appl. Prob. - 2006. - 16. - p. 2098-2122.

25. Di Crescenzo, A., Giorno, V., Nobile, A.G., Ricciardi, L.M. A note on birth-death processes with catastrophes / A. Di Crescenzo, V. Giorno, A.G. Nobile, L.M. Ricciardi // Statist. Probab. Lett., 2008. - 78. - p. 2248-2257.
26. Dudin, A., Nishimura, S. A BMAP/SM/1 queueing system with Markovian arrival input of disasters. / A. Dudin, S. Nishimura // J. Appl. Probab., 1999. - 36. - p. 868-881.
27. Dudin, A., Karolik, A. BMAP/SM/1 queue with Markovian input of disasters and non-instantaneous recovery / A. Dudin, A. Karolik // Perform. Eval., 2001. - 45. - p. 19-32.
28. Enikeeva, F., Kalashnikov, V., Rusaitite, D. Continuity Estimates for Ruin Probabilities / F. Enikeeva, V. Kalashnikov, D. Rusaitite // Scand. Actuarial J., 2001. - 1. - p. 18-39.
29. Foss, S.G., Kalashnikov, V.V. Regeneration and renovation in queues / S.G. Foss, V.V. Kalashnikov // Queueing Systems. - 1991. - 8(1). - p. 211-223.
30. Fricker, C., Robert, P., Tibi, D. On the rate of convergence of Erlang's model / C. Fricker, P. Robert, D. Tibi // J. Appl. Probab. - 1999. - 36. - p. 1167-1184.
31. Granovsky, B.L., Zeifman, A.I. The decay function of nonhomogeneous birth-death processes, with application to mean-field models / B. L. Granovsky, A. I. Zeifman // Stoch. Proc. Appl.. - 1997. - 72. - p. 105-120.
32. Granovsky, B.L., Zeifman, A.I. The N-limit of spectral gap of a class of birth-death Markov chains / B. L. Granovsky, A. I. Zeifman // Appl. Stoch. Models in Business and Industry. - 2000. - 16. - p. 235-248.
33. Granovsky, B.L., Zeifman, A.I. Nonstationary Queues: Estimation of the Rate of Convergence / B. L. Granovsky, A. I. Zeifman // Queueing Systems. - 2004. - 46. - p. 363-388.

34. Granovsky, B.L., Zeifman, A.I. On the lower bound of the spectrum of some mean-field models / B. L. Granovsky, A. I. Zeifman // Theory Prob. Appl. - 2005. - 49. - p. 148-155.
35. Halfin, S., Whitt, W. Heavy-traffic limits for queues with many exponential servers / S. Halfin, W. Whitt // Oper. Res.. - 1981. - 29. - p. 567-588.
36. Islam, M.A. A Birth-Death Process Approach to Constructing Multistate Life Tables / M.A. Islam // Bull. Malaysian Math. Sc. Soc. (Second Series), 2003. - 26. - p. 101-108.
37. Kartashov, N.V. Strong stable Markov chains / Kartashov N. V. - Kiev: Utrecht, VSP, TBiMC, 1996.
38. Kijima, M. On the largest negative eigenvalue of the infinitesimal generator associated with  $M/M/n/n$  queues / M. Kijima // Oper. Res. Let. - 1990. - 9. - p. 59-64.
39. Klimenok Valentina, Dudin Alexander Multi-dimensional asymptotically quasi-Toeplitz Markov chains and their application in queueing theory / Valentina Klimenok, Alexander Dudin // Queueing Systems. - 2006. - 54. - p. 245-259.
40. Krishna Kumar, B., Arivudainambi, D. Transient solution of an  $M/M/1$  queue with catastrophes / Krishna Kumar B., Arivudainambi D. // Comput. Math. Appl., 2000. - 40. - p. 1233-1240.
41. Margolius, B.H. The matrices R and G of matrix analytic methods and the time-inhomogeneous periodic Quasi-Birth-and-Death process / // Queueing Systems. - 2008. - 60(1-2). - p. 131-151.

42. Meyn, Sean, P., Robert, L. Tweedie Computable bounds for geometric convergence rates of Markov chains / Meyn, Sean P., Robert L. // The Annals of Applied Probability. - 1994. - p. 981-1011.
43. Mitrophanov, A.Yu. Stability and exponential convergence of continuous-time Markov chains / A.Yu. Mitrophanov // J. Appl. Prob. - 2003. - 40. - p. 970-979.
44. Morozov, Evsei The stability of a non-homogeneous queueing system with regenerative input / Evsei Morozov // Journal of Mathematical Sciences 83.3. - 1997. - p. 407-421.
45. Morozov, Evsey A multiserver retrial queue: regenerative stability analysis / Evsey Morozov // Queueing Systems 56.3-4. - 2007. - p. 157-168.
46. Neuts, Marcel F. Markov chains with applications in queueing theory, which have a matrix-geometric invariant probability vector / Neuts, Marcel F // Advances in Applied Probability. - 1978. - p. 185-212.
47. Rykov, V.V. Monotone control of queueing systems with heterogeneous servers / V.V. Rykov // Queueing systems. - 2001. - 37(4). - p. 391-403.
48. Van Doorn, E.A., Zeifman, A.I., Panfilova, T.L. Bounds and asymptotics for the rate of convergence of birth-death processes / E.A. Van Doorn, A.I. Zeifman, T.L. Panfilova // Th. Prob. Appl. - 2009. - 54. - p. 18-38.
49. Van Doorn, E.A., Zeifman, A.I. On the speed of convergence to stationarity of the Erlang loss system / E.A. Van Doorn, A.I. Zeifman // Queueing Systems. - 2009. - 63. - p. 241-252.
50. Voit, M. A note of the rate of convergence to equilibrium for Erlang's model in the subcritical case / M. Voit // J. Appl. Probab. - 2000. - 37. - p. 918-923.

51. Zeifman, A., Leorato, S., Orsingher, E., Satin, Ya., Shilova, G. Some universal limits for nonhomogeneous birth and death processes / A. Zeifman, S. Leorato, E. Orsingher, Ya. Satin, G. Shilova // Queueing systems. - 2006. - 52. - p. 139-151.
52. Zeifman, A.I. On nonstationary Erlang model / A. I. Zeifman // Automation and Remote Control. - 2009.
53. Zeifman, A.I. Properties of a system with losses in the case of variable rates / A. I. Zeifman // Automat. Remote Control. - 1989. - 50. - p. 82-87.
54. Zeifman, A.I. Stability for continuous-time nonhomogeneous Markov chains / A. I. Zeifman // Lect. Notes Math.. - 1155. - 1985. - p. 401-414.
55. Zeifman, A. Stability of birth and death processes / A. Zeifman // Journal of Mathematical Sciences. 1998. - 91. - 3. - p. 3023 - 3031.
56. Zeifman, A., Satin, Ya., Chegodaev, A., Bening, V., Shorgin, V. Some bounds for  $M(t)/M(t)/S$  queue with catastrophes / A. Zeifman, Ya. Satin, A. Chegodaev, V. Bening, V. Shorgin // SMCtools. - 2008.
57. Zeifman, A., Satin, Ya., Shorgin, S., Bening, V. On  $M_n(t)/M_n(t)/S$  queues with catastrophes / A. Zeifman, Ya. Satin, S. Shorgin, V. Bening // Proceedings of the 4th International Conference on Performance Evaluation Methodologies and Tools 2009. - Pisa, Italy. - October 19 - 23. - 2009.
58. Zeifman, A.I. Some estimates of the rate of convergence for birth and death processes / A. I. Zeifman // J. Appl. Probab. - 1991. - 28. - p. 268-277.
59. Zeifman, A.I. Upper and lower bounds on the rate of convergence for nonhomogeneous birth and death processes / A. I. Zeifman // Stoch. Proc. Appl.. - 1995. - 59. - p. 157-173.

60. Зейфман, А.И., Коротышева, А.В., Терешина, Н.А., Сатин, Я.А. О предельных характеристиках системы обслуживания  $M(t)/M(t)/S$  с катастрофами / А.И. Зейфман, А.В. Коротышева, Н.А. Терешина, Я.А. Сатин // Информатика и ее применения. - 2009. - 3.- N3. - с. 16-22.
61. Зейфман, А.И., Коротышева, А.В., Сатин, Я.А., Шоргин, С.Я. Об устойчивости нестационарных систем обслуживания с катастрофами / А.И. Зейфман, А.В. Коротышева, Я.А. Сатин, С.Я. Шоргин // Информатика и ее применения. - 2010. - 4. - N3. - с. 9-15.
62. Зейфман, А.И., Коротышева, А.В., Панфилова, Т.Л., Шоргин, С.Я. Оценки устойчивости для некоторых систем обслуживания с катастрофами / А.И. Зейфман, А.В. Коротышева, Т.Л. Панфилова, С.Я. Шоргин // Информатика и ее применения. - 2011. - 5. - N3. - с. 27-33.
63. Сатин, Я.А., Зейфман, А.И., Коротышева, А.В., Шоргин, С.Я. Об одном классе марковских систем обслуживания / Я.А. Сатин, А.И. Зейфман, А.В. Коротышева, С.Я. Шоргин // Информатика и ее применения. - 2011. - 5. - N4. - с. 6-12.
64. Сатин, Я.А., Зейфман, А.И., Коротышева, А.В. О скорости сходимости и усечениях для одного класса марковских систем обслуживания / Я.А. Сатин, А.И. Зейфман, А.В. Коротышева // Теория вероятностей и ее применения. - 2012. - т. 57. - 3. - с. 611-621.
65. Zeifman, A., Korotysheva, A., Shorgin, S., Bening, V. Stability bounds for  $M_t/M_t/N/N+R$  queue / A. Zeifman, A. Korotysheva, S. Shorgin, V. Bening // Proceedings of the 5th International Conference on Performance Evaluation Methodologies and Tools 2011. - Cachan. - Paris, France. - May 16 - 20. - 2011.

66. Zeifman, A., Korotysheva, A. Perturbation Bounds for  $M_t/M_t/N$  Queue with Catastrophes / A. Zeifman, A.Korotysheva // Stochastic Models. - 28:1. - p. 49-62.
67. Zeifman, A., Korotysheva, A., Panfilova, T., Satin, Ya., Shilova, G. On a Queueing Model with Group Services / A. Zeifman, A. Korotysheva, T. Panfilova, Ya. Satin, G. Shilova // Lecture Notes in Communications in Computer and Information Science. - Springer. - 2013. - p. 198-205.
68. Коротышева, А.В. Оценки устойчивости для конкретных моделей процессов рождения и гибели с катастрофами / А.В. Коротышева // Вестник НСО ВГПУ. Выпуск VIII. - Вологда: издательство ВГПУ. - 2010. - с.16-28.
69. Зейфман, А.И., Коротышева, А.В., Панфилова, Т.Л. Оценки устойчивости для некоторых линейных систем / А.И. Зейфман, А.В. Коротышева, Т.Л. Панфилова // Международная конференция, посвященная 110-той годовщине И.Г. Петровского. Тезисы докладов. - М.: Изд-во МГУ и ООО "ИНТУИТ.РУ". - 2011, с. 216.
70. Коротышева, А.В. Оценки устойчивости для модели  $M_t/M_t/N$  с катастрофами / А.В. Коротышева // Статистические методы оценивания и проверки гипотез: межвуз. сб. науч. тр. / Пермь: Перм. гос. нац. иссл. ун-т. - 2013. - Вып. 25. - с. 132- 143.
71. Zeifman, A., Korotysheva, A., Tereshina, N. On  $M(t)/M(t)/S$  queue with catastrophes / A. Zeifman, A. Korotysheva, N. Tereshina // Proceeding of the 6-th St. Petersburg Workshop on Simulation. - 2009. - p. 79-82.
72. Zeifman, A., Korotysheva, A., Tereshina, N. On the properties of differential equations for a queueing model with catastrophes / A. Zeifman, A. Korotysheva, N. Tereshina // International Conference "Geometry in Odessa - 2009". Abstracts. - Odessa. - 2009. - p. 99.

73. Zeifman, A., Korotysheva, A., Satin, Ya. On stability for  $M(t)/M(t)/N/N$  queue / A. Zeifman, A. Korotysheva, Ya. Satin // ICUMT 2010. International Conference on Ultra Modern Telecommunications. - Moscow. - 2010. - p. 1-5.
74. Zeifman, A., Korotysheva, A., Shilova, G., Satin, Ya. Stability bounds for some queueing models / A. Zeifman, A. Korotysheva, G. Shilova, Ya. Satin // Modern Stochastics: Theory and Applications III. International conference. Abstract. - Kyiv. - 2012. - p. 69.
75. Zeifman, A., Korotysheva, A., Satin, Ya., Shilova, G., Shorgin, S. Approximations for a Class of Markovian Queueing Models / A. Zeifman, A. Korotysheva, Ya. Satin, G. Shilova, S. Shorgin // VI International Workshop Applied Problems in Theory of Probabilities and Mathematical Statistics Related to Modeling of Information Systems, (Autumn Session, 2012). Abstracts. - Moscow. - IPI RAS. - 2012. - p. 82-90.
76. Zeifman, A., Korotysheva, A., Panfilova, T., Satin, Ya., Shilova, G. On stability for nonstationary  $M/M/N/N + R$  queue / A. Zeifman, A. Korotysheva, T. Panfilova, Ya. Satin, G. Shilova // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети. Материалы международной научной конференции. - Минск. - 2011. - с. 271-276.